

II. Megoldás.¹ Tudvalevőleg tetszőleges t és pozitív egész n és s mellett, ha $|x| < 1$

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+t} &= \binom{n+t}{0} + \binom{n+t}{1}x + \binom{n+t}{2}x^2 + \dots + \\ &+ \binom{n+t}{n}x^n + \binom{n+t}{n+1}x^{n+1} + \dots + \binom{n+t}{n+s}x^{n+s} + \dots \\ (1+x)^{n+t-1} &= \binom{n+t-1}{0} + \binom{n+t-1}{1}x + \binom{n+t-1}{2}x^2 + \dots + \\ &+ \binom{n+t-1}{n}x^n + \binom{n+t-1}{n+1}x^{n+1} + \dots + \binom{n+t-1}{n+s}x^{n+s} + \dots\end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned}(1+x)^t &= \binom{t}{0} + \binom{t}{1}x + \binom{t}{2}x^2 + \dots + \\ &+ \binom{t}{n}x^n + \binom{t}{n+1}x^{n+1} + \dots + \binom{t}{n+s}x^{n+s} + \dots\end{aligned}$$

Szorozzuk a jobb és baloldalt sorban $\binom{n}{0}$, $-\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, $\dots$, $(-1)^n \binom{n}{n}$ -tel; akkor a baloldal $(1+x)^t$ kiemelésével ily alakot vesz fel

$$\begin{aligned}(1+x)^t \left[\binom{n}{0}(1+x)^n - \binom{n}{1}(1+x^{n-1}) + \binom{n}{2}(1+x^{n-2} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}) \right] = \\ = (1+x)^t [(1+x) - 1]^n = (1+x)^t \cdot x^n (0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots + \\ + \binom{t}{0}x^n + \binom{t}{1}x^{n+1} + \binom{t}{2}x^{n+2} + \dots + \binom{t}{s}x^{n+s} + \dots\end{aligned}$$

Mint hogy a szorzás után is a bal- és jobboldalon az x egyforma hatványai mellett levő együtthatóknak egyenlőknek kell lenniök, azért a következő formulasort nyerjük, a melyben a bebizonyítandó is helyet foglal:

$$\begin{aligned}0 &= \binom{n}{0} \binom{n+t}{0} - \binom{n}{1} \binom{n+t-1}{0} + \binom{n}{2} \binom{n+t-2}{0} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \binom{t}{0} \\ 0 &= \binom{n}{0} \binom{n+t}{1} - \binom{n}{1} \binom{n+t-1}{1} + \binom{n}{2} \binom{n+t-2}{1} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \binom{t}{1}\end{aligned}$$

.....

$$0 = \binom{n}{0} \binom{n+t}{n-1} - \binom{n}{1} \binom{n+t-1}{n-1} + \binom{n}{2} \binom{n+t-2}{n-1} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \binom{t}{n-1}$$

továbbá

$$1 = \binom{t}{0} = \binom{n}{0} \binom{n+t}{n} - \binom{n}{1} \binom{n+t-1}{n} + \binom{n}{2} \binom{n+t-2}{n} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \binom{t}{n}$$

azonfelül

$$\binom{t}{1} = \binom{n}{0} \binom{n+t}{n+1} - \binom{n}{1} \binom{n+t-1}{n+1} + \binom{n}{2} \binom{n+t-2}{n+1} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \binom{t}{n+1}$$

.....

$$\binom{t}{s} = \binom{n}{0} \binom{n+t}{n+s} - \binom{n}{1} \binom{n+t-1}{n+s} + \binom{n}{2} \binom{n+t-2}{n+s} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \binom{t}{n+s}.$$

Látjuk, hogy e megoldás a feladatnak általánosítását is tartalmazza.

Dr. Lóky Béla, kegyesrendi tanár, Kolozsvár.

¹+ E feladatnak egy másik megoldását lásd: K.M.L.VII.73.1.