

Mielőtt tételünket bebizonyítanók, kimutatjuk a következő egyenlőség helyességét:

$$\binom{m+n}{r} = \binom{m}{r} + \binom{m}{r-1} \binom{n}{1} + \binom{m}{r-2} \binom{n}{2} + \dots + \binom{m}{1} \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}.$$

Ismeretes, hogy

$$(1) \quad (1+a)^m = 1 + \binom{m}{1}a + \binom{m}{2}a^2 + \dots + \binom{m}{r}a^r \dots$$

$$(2) \quad (1+a)^n = 1 + \binom{n}{1}a + \binom{n}{2}a^2 + \dots + \binom{n}{r}a^r \dots$$

$$(3) \quad (1+a)^{m+n} = 1 + \binom{m+n}{1}a + \binom{m+n}{2}a^2 + \dots + \binom{m+n}{r}a^r + \dots$$

Ha (1)-et (2)-vel megszorozzuk, akkor ered:

$$\begin{aligned} (1+a)^m \cdot (1+a)^n &= (1+a)^{m+n} = \\ &= 1 + \binom{m}{1}a + \binom{m}{2}a^2 + \binom{m}{3}a^3 + \dots + \binom{m}{r}a^r + \dots \\ &\quad \binom{n}{1} \quad \binom{m}{1} \binom{n}{1} \quad \binom{m}{2} \binom{n}{1} \quad \binom{m}{r-1} \binom{n}{1} \\ &\quad \binom{n}{2} \quad \binom{m}{2} \binom{n}{2} \quad \binom{m}{1} \binom{n}{2} \quad \binom{m}{r-2} \binom{n}{2} \\ &\quad \vdots \\ &\quad \binom{m}{1} \binom{n}{r-1} \\ &\quad \binom{n}{r} \end{aligned} \quad (4)$$

A (3)-ban és (4)-ben összehasonlítva a^r -nek együtthatóit, közvetlenül beláthatjuk segédtételünk helyességét; m és n tetszőleges számok, mert a binomiális tétel minden kitevőre helyes, r azonban, mint a természetes számsor $(1, 2, 3, \dots)$ tagja, csakis pozitív, egész szám lehet.

Mínthogy feladatunkban n pozitív, egész szám, azért segédtételünk értelmében:

$$\begin{aligned} \binom{n+t}{n} &= \binom{n}{n} + \binom{n}{n-1} \binom{t}{1} + \binom{n}{n-2} \binom{t}{2} + \dots + \\ &\quad + \binom{n}{n-k} \binom{t}{k} + \dots + \binom{n}{1} \binom{t}{n-1} + \binom{t}{n} \dots \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \binom{n-1+t}{n} &= \binom{n-1}{n} + \binom{n-1}{n-1} \binom{t}{1} + \binom{n-1}{n-2} \binom{t}{2} + \dots + \\ &\quad + \binom{n-1}{n-k} \binom{t}{k} + \dots + \binom{n-1}{1} \binom{t}{n-1} + \binom{t}{n} \dots \end{aligned} \quad (2)$$

.....

$$\begin{aligned} \binom{n-k+t}{n} &= \binom{n-k}{n} + \binom{n-k}{n-1} \binom{t}{1} + \binom{n-k}{n} \binom{t}{2} + \dots + \\ &\quad + \binom{n-k}{n-k} \binom{t}{k} + \dots + \binom{n-k}{1} \binom{t}{n-1} + \binom{t}{n} \dots \end{aligned} \quad (k+1)$$

.....

$$\begin{aligned} \binom{n-n+t}{n} &= \binom{n-n}{n} + \binom{n-n}{n-1} \binom{t}{1} + \dots + \\ &\quad + \binom{n-n}{n-k} \binom{t}{k} + \dots + \binom{n-n}{1} \binom{t}{n-1} + \binom{t}{n} \dots \end{aligned} \quad (n+1)$$

Ha eme egyenlőségeket a feladatban előforduló együtthatókkal megszorozzuk, s tekintetbe vesszük, hogy

$$\binom{s}{r} = 0,$$

ha $r > s$, akkor

$$\begin{aligned}
& \binom{n+t}{n} - \binom{n}{1} \binom{n+t-1}{n} + \binom{n}{2} \binom{n+t-2}{n} + \dots + \\
& + (-1)^n \binom{n}{n} \binom{t}{n} = \binom{n}{n} + \binom{t}{1} \left[\binom{n}{n-1} - \binom{n}{1} \binom{n-1}{n-1} \right] + \dots + \\
& + \binom{t}{k} \left[\binom{n}{n-k} - \binom{n}{1} \binom{n-1}{n-k} + \dots + (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{n-k} \right] + \dots
\end{aligned}$$

vagy rövidebb jelöléssel

$$\begin{aligned}
& \binom{n+t}{n} - \binom{n}{1} \binom{n+t-1}{n} + \dots + \\
& (-1)^n \binom{n}{n} \binom{t}{n} = \binom{n}{n} + C_1 \binom{t}{1} + C_2 \binom{t}{2} + \dots + \\
& + C_k \binom{t}{k} + \dots + C_n \binom{t}{n}.
\end{aligned}$$

Könnyen kimutatható már most, hogy

$$C_k = 0,$$

ha k helyébe $1, 2, \dots, n$ -et teszünk. Ugyanis

$$\begin{aligned}
C_k &= \binom{n}{n-k} - \binom{n}{1} \binom{n-1}{n-k} + \dots + (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{n-k} = \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} - \frac{n!}{1!(n-k)!(k-1)!} + \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-k)!(k-2)!} + \\
&+ \dots + (-1)^k \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!}.
\end{aligned}$$

Ámde

$$\begin{aligned}
& n(n-1) \dots (n-k+1)(n-k)! = \\
& = n(n-1) \dots (n-k+1)(n-k) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!
\end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned}
C_k &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \left[\frac{k!}{k!} - \frac{k!}{(k-1)!1!} + \dots + (-1)^k \frac{k!}{k!} \right] = \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} \left[\binom{k}{0} - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \dots + (-1)^k \binom{k}{k} \right].
\end{aligned}$$

Csakhog

$$\binom{k}{0} - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \binom{k}{3} + \dots + (-1)^k \binom{k}{k} = (1-1)^k = 0,$$

és így

$$C_k = \binom{n}{k} (1-1)^k = 0.$$

Ennéfogva

$$\begin{aligned}
& \binom{n+t}{n} - \binom{n}{1} \binom{n+t-1}{n} + \binom{n}{2} \binom{n+t-2}{n} + \dots + \\
& - 1^n \binom{n}{n} \binom{t}{n} = \binom{n}{n} + \sum_{k=1}^{k=n} C_k \binom{t}{k} = \binom{n}{n} = 1,
\end{aligned}$$

ha csak n pozitív egész szám.

(Antal Márkus, bölcsészethallgató, Budapest.)