

Határozzuk meg a függvény értékét, ha $x = \pm\infty$. Számlálót s nevezőt x^2 -tel osztva:

$$y = \frac{1 - \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}$$

Látjuk, hogy $y = 1$, ha $x = \pm\infty$.

Keressük x -nek ama értékeit, melyek mellett $y = 0$; a függvény akkor 0, ha a számláló 0;

$$x^2 - 4 = 0$$

egyenletnek gyökei: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

A függvény végtelen nagy, ha a nevező 0;

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

egyenletnek gyökei: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$.

Hogy a függvény maximumát meghatározhassuk, kifejezzük x -et y által. A nevezőt eltávolítva s rendezve:

$$x^2(y-1)+2yx-3y+4=0,$$

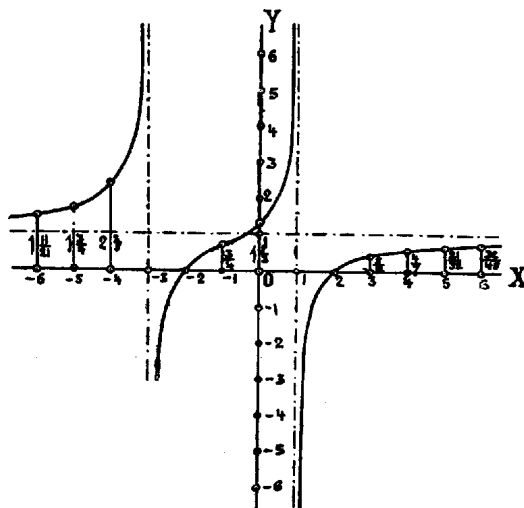
miből

$$x = \frac{-y \pm \sqrt{4y^2 - 7y + 4}}{y - 1},$$

vagy

$$x = \frac{-y \pm \sqrt{(2y - \frac{7}{4})^2 + \frac{15}{16}}}{y - 1}.$$

Látjuk, hogy x , y -nak minden értéke mellett valós, tehát y változhatik $-\infty$ -tól $+\infty$ -ig.



Hogy a függvényt megrajzolhassuk, még néhány értékét határozzuk meg; így ha x helyébe $-6, -5, -4, -1, 0, 3, 4, 5, 6$ -ot teszünk, akkor y -nak értékei: $1\frac{11}{21}, 1\frac{3}{4}, 2\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, 1\frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{4}{7}, \frac{21}{32}, \frac{32}{45}$.

A változóknak egymáshoz tartozó értékei tehát a következők:

x	$-\infty$	$\dots$	$-6,$	$-5,$	$-4,$	$-3\frac{1}{2},$	$-3,$	$-2\frac{1}{2},$	$-2,$	$-1,$	$0,$	$\frac{1}{2}$	$1,$	$1\frac{1}{2},$
y	$1,$		$1\frac{11}{21},$	$1\frac{3}{4},$	$2\frac{2}{3},$	$3\frac{2}{3},$	$\pm\infty,$	$-1\frac{2}{7},$	$0,$	$\frac{3}{4},$	$1\frac{1}{3},$	$2\frac{1}{7},$	$\pm\infty,$	$-\frac{7}{9}$
						$2, 3, 4, 5, 6, \dots \pm\infty$								
						$\frac{5}{12}, \frac{4}{7}, \frac{21}{32}, \frac{32}{45}$								
							1							

E táblázat mutatja, hogy a függvény értéke 1, ha $x = -\infty$; tehát az $y = 1$ egyenes asymptotája a görbének; ha $x, -3$ -ig nő, y nő $-\infty$ -ig; innen átugrik $-\infty$ -be; az $x = -3$ egyenes asymptotája a görbének. Ha x tovább nő 1-ig, y nő $-\infty$ -ig; ezután ismét $-\infty$ -be ugrik át; az $x = 1$ egyenes asymptotája a görbének; ezután pedig x -nek növekedésével y nő 1-ig, úgy, hogy $y = 1$ egyenes asymptotája a görbének.

(*Filkorn Jenő, Nyitra.*)

A feladatot megoldották: Freibauer E., Goldziher K., Kármán T., Kerekes T., Krausz B., Krisztián Gy., Lukhaub Gy., Pálffy F., Prohászka J., Sasvári G.