

Határozzuk meg a függvény értékét, ha $x = \pm\infty$. Számlálót és nevezőt x^2 -tel osztva:

$$y = \frac{1 - \frac{6}{x} + \frac{8}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

Látjuk, hogy $y = 1$, ha $x = \pm\infty$.

Keressük x -nek ama értékeit, melyek mellett $y = 0$; a függvény akkor 0, ha a számláló 0:

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

egyenletnek gyökei: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

A függvény végtelen nagy, ha a nevező 0.

$$x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Ezen egyenlet gyökei: $x_1 = x_2 = 1$.

Hogy a függvény maximumát vagy minimumát meghatározhassuk, kifejezzük x -et y által. A nevezőt eltávolítva s rendezve:

$$x^2(1 - y) - 2x(3 - y) + 8 - y = 0,$$

miből

$$(1) \quad x = \frac{3 - y \pm \sqrt{3y + 1}}{1 - y}$$

x akkor valós, ha

$$3y + 1 \geq 0,$$

miből

$$y \geq -\frac{1}{3}$$

y tehát $-\frac{1}{3}$ -tól $+\infty$ -ig minden értéket felvehet; a függvénynek tehát minimuma van, mely $-\frac{1}{3}$; y -nak ezen értékét

(1)-be helyettesítve, kapjuk, hogy $x = \frac{5}{2}$.

Hogy a függvényt megrajzolhassuk, még néhány értéket határozzuk meg; így ha x helyébe

$-5, -4, -3, -2, -1, 0, \frac{1}{2}, 3, 5, 6$ -ot teszünk, akkor y értékei:

$1\frac{3}{4}, 1\frac{23}{25}, 2\frac{3}{16}, 2\frac{2}{3}, 3\frac{3}{4}, 8, 21, -\frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{8}{25}$.

A változóknak egymáshoz tartozó értékei tehát a következők:

x	$-\infty$	$\dots$	-5	-4	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	$2\frac{1}{2}$	3	4	5	$\dots$	$+\infty$
y	1	$\dots$	$1\frac{3}{4}$	$1\frac{23}{25}$	$2\frac{3}{16}$	$2\frac{2}{3}$	$3\frac{3}{4}$	8	21	$+\infty$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{16}$	$\dots$	1

E táblázat mutatja, hogy a függvény értéke 1, ha $x = -\infty$; tehát az $y = 1$ egyenes asymptotája a görbének; ha x 1-ig nő, y nő ∞ -ig; az $x = 1$ egyenes tehát asymptotája a görbének; ha x tovább nő $2\frac{1}{2}$ -ig, a függvény fogy $-\frac{1}{3}$ -ig, a minimális értékig; ezután pedig x -nek a növekedésével, y nő 1-ig, úgy, hogy az $y = 1$ egyenes ismét asymptotája a görbének.

