

¹ 1°. Minthogy

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{a}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}},$$

azért

$$\begin{aligned} 4R &= \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{4a \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{a \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{ss_2s_3}{s}} = r_1. \end{aligned}$$

Épp így:

$$r_2 = 4R \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\gamma}{2}, \quad r_3 = 4R \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}.$$

2°.

$$\begin{aligned} r_1 r_2 r_3 &= \frac{a \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{b \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}} \cdot \frac{c \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}}. \\ &= abc \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

(Oltay Károly, Budapest, II. ker. áll. főrréalisk.)

Megoldások száma: 10.

¹A következő jelöléseket alkalmazzuk: $s = \frac{a+b+c}{2}$, $s_1 = s - a$, $s_2 = s - b$, $s_3 = s - c$. R a háromszög köré írható kör sugara, O a középpontja, r a háromszögbe írható kör sugara, O' e kör középpontja; r_1, r_2, r_3 a háromszög oldalait kívülről érintő körök sugarai; O_1, O_2, O_3 e körök középpontjai. $OO' = d$, $OO_1 = d_1$, $OO_2 = d_2$, $OO_3 = d_3$. A beírt kör K_1, K_2, K_3 pontokban érinti a háromszög oldalait; az r_1, r_2, r_3 sugarú körök $K'_1, K''_1, K'''_1, K'_2, K''_2, K'''_2, K'_3, K''_3, K'''_3$ pontokban érintik a háromszög oldalait.