

¹ 1°. Minthogy

$$\sin \alpha = \frac{a}{2R}, \quad \sin \beta = \frac{b}{2R}, \quad \sin \gamma = \frac{c}{2R},$$

azért

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = \frac{a + b + c}{2R} = \frac{s}{R}.$$

2°.

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2},$$

de

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s_2 s_3}{bc}}, \quad \sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s_1 s_3}{ac}}, \quad \sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s_1 s_2}{ab}}$$

s így

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= 1 + 4 \frac{s_1 s_2 s_3}{abc} = \\ &= 1 + \frac{\frac{t}{s}}{\frac{abc}{4t}} = 1 + \frac{r}{R}. \end{aligned}$$

(Lukhaub Gyula.)

Megoldások száma: 11.

¹A következő jelöléseket alkalmazzuk: $s = \frac{a+b+c}{2}$, $s_1 = s - a$, $s_2 = s - b$, $s_3 = s - c$. R a háromszög köré írható kör sugara, O a középpontja, r a háromszögbe írható kör sugara, O' e kör középpontja; r_1, r_2, r_3 a háromszög oldalait kívülről érintő körök sugarai; O_1, O_2, O_3 e körök középpontjai. $OO' = d$, $OO_1 = d_1$, $OO_2 = d_2$, $OO_3 = d_3$. A beírt kör K_1, K_2, K_3 pontokban érinti a háromszög oldalait; az r_1, r_2, r_3 sugarú körök $K'_1, K''_1, K'''_1, K'_2, K''_2, K'''_2, K'_3, K''_3, K'''_3$ pontokban érintik a háromszög oldalait.