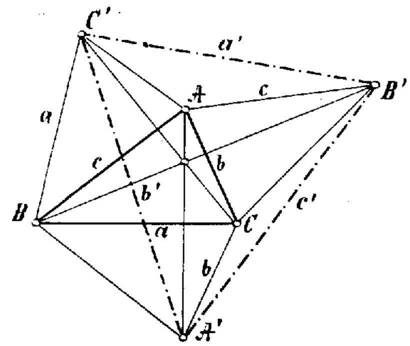
(1) Kössük össze C'-t és B'-t A-val, A'-t és C'-t B-vel, A'-t és B'-t C-vel.



Minthogy

$$ABC\triangle \cong BAC'\triangle \text{ és } BAC\triangle \cong ACB'\triangle,$$

azért

$$AC' = b,\ AB' = c,$$

$$BAC'\sphericalangle = CAB'\sphericalangle = \alpha$$

s így

$$C'AB'\sphericalangle = 360^\circ - 3\alpha$$

$B'C'A$ háromszögből:

$$a'^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 3\alpha$$

ABC háromszögből

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

s így

$$a'^2 - a^2 = 2bc(\cos\alpha - \cos 3\alpha).$$

De

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha =$$

$$= \cos^3\alpha - 3\sin^2\cos\alpha$$

s így

$$a'^2 - a^2 = 2bc(\cos\alpha - \cos^3\alpha + 3\sin^2\cos\alpha)$$

$$a'^2 - a^2 = 2bc[3\sin^2\alpha\cos\alpha + \cos\alpha(1 - \cos^2\alpha)]$$

$$a'^2 - a^2 = 2bc(3\sin^2\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin^2\alpha)$$

$$a'^2 - a^2 = 8bc\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

De az ABC háromszög kettős területe:

$$2t = bc\sin\alpha$$

s így

$$a'^2 - a^2 = 8t\sin 2\alpha$$

épp így

$$b'^2 - b^2 = 8t\sin 2\beta$$

$$c'^2 - c^2 = 8t\sin 2\gamma,$$

mely egyenletek összeadásából ered:

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 8t(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma).$$

De

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

s így végre:

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 32t(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma).$$

(2)

$$t' = 4t - \frac{bc}{2}\sin 3\alpha - \frac{ac}{2}\sin 3\beta - \frac{ab}{2}\sin 3\gamma,$$

de

$$\frac{bc}{2} = \frac{t}{\sin\alpha}, \qquad \frac{ac}{2} = \frac{t}{\sin\beta}, \qquad \frac{ab}{2} = \frac{t}{\sin\gamma}$$

s így

$$t' = 4t - \frac{t\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = \frac{t\sin 3\beta}{\sin\beta} - \frac{t\sin 3\gamma}{\sin\gamma}.$$

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin(2\alpha+\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha} =$$

$$= 2\cos^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 4\cos^2\alpha - 1$$

épp így

$$\frac{\sin 3\beta}{\sin\beta} = 4\cos^2\beta - 1 \quad \text{és} \quad \frac{\sin 3\gamma}{\sin\gamma} = 4\cos^2\gamma - 1.$$

Ezen kifejezéseket helyettesítve:

$$t' = 4t + 3t - 4t(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$

De (K.M.L.V.53.lap)

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

s így

$$t' = 3t + 8t\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

vagy

$$t' = t[3 + 8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma].$$

(Szabó István.)

A feladatot még megoldották: Barna D., Bella I., Fekete J., Freibauer E., Goldziher K., Groffits G., Hrivnák A., Kertész L., Manheim E., Sasvári G.