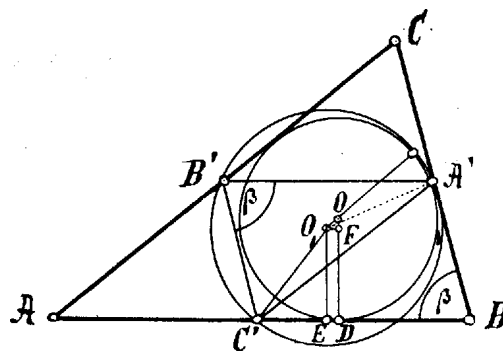


1°. Tudjuk, hogy a Feuerbach-féle kör ¹ keresztül megy az A' , B' , és C' oldalfelező pontokon.



Legyen O_1 a Feuerbach-féle kör középpontja, $O_1C' = \frac{R}{2}$ a sugara, hol R az ABC háromszög köré írt kör sugara; legyen továbbá a háromszöget belül érintő kör középpontja O , sugara $OD = r$; a háromszög oldalai a , b , c ; szögei α , β , γ ; a háromszög félkerülete s .

$$O_1C'B' \sphericalangle = O_1C'A' \sphericalangle + A'C'B \sphericalangle$$

$C'O_1A' \sphericalangle$ mint középponti szög 2β , tehát $O_1C'A' \sphericalangle = 90^\circ - \beta$.

$A'C'B' \sphericalangle = \alpha$, mert $A'D' \parallel AC$ s így

$$O_1C'B' \sphericalangle = 90^\circ - (\beta - \alpha).$$

Az OO_1F derékszögű háromszögből az OO_1 centrális négyzete:

$$(1) \quad \overline{OO_1}^2 = \overline{OF}^2 + \overline{O_1F}^2.$$

De

$$OF = OD - O_1E = r - \frac{R}{2} \cos(\beta - \alpha)$$

és

$$\begin{aligned} O_1F &= ED = C'B - BD - C'E \\ \frac{c}{2} - (s - b) - \frac{R}{2} \sin(\beta - \alpha) &= \frac{b - a}{2} - \frac{R}{2} \sin(\beta - \alpha) \\ &= R(\sin \beta - \sin \alpha) - \frac{R}{2} \sin(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

s így

$$\begin{aligned} \overline{OO_1}^2 &= \left[r - \frac{R}{2} \cos(\beta - \alpha) \right]^2 + \left[R(\sin \beta - \sin \alpha) - \frac{R}{2} \sin(\beta - \alpha) \right]^2 \\ \overline{OO_1}^2 &= r^2 \frac{R^2}{4} - Rr \cos(\beta - \alpha) + R^2(\sin \beta - \sin \alpha) \times \\ &\quad \times [(\sin \beta - \sin \alpha) - \sin(\beta - \alpha)] \end{aligned}$$

de

$$\cos(\beta - \alpha) = 1 - 2 \sin^2 \frac{\beta - \alpha}{2}$$

s így

$$\begin{aligned} \overline{OO_1}^2 &= r^2 + \frac{R^2}{4} - Rr + 2Rr \sin^2 \frac{\beta - \alpha}{2} + 4R^2 \cos \frac{\beta - \alpha}{2} + 4R^2 \cos \frac{\beta + \alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta - \alpha}{2} \times \\ &\quad \times \left(\cos \frac{\beta + \alpha}{2} - \cos \frac{\beta - \alpha}{2} \right) \\ &= \left(r - \frac{R}{2} \right)^2 + 2Rr \sin^2 \frac{\beta - \alpha}{2} - 8R^2 \sin^2 \frac{\beta - \alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Minthogy pedig

$$4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = r$$

¹ Azon kört, mely a háromszög magasságainak talppontjain, az oldalak középpontjain és a magasságoknak a csúcsok felé eső részeinek középpontjain megy át, Feuerbach-féle körnek nevezzük (K.M.L, A talpponti háromszög; IV. 44. lap.).

azért

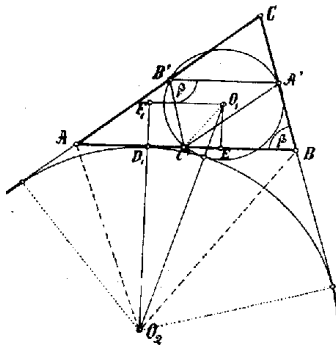
$$\overline{OO_1}^2 = \left(r - \frac{R}{2}\right)^2 + 2Rr \sin^2 \frac{\beta - \alpha}{2} - 2Rr \sin^2 \frac{\beta - \alpha}{2}$$

vagyis

$$OO_1 = \frac{R}{2} - r.$$

Míthogy tehát a centrális egyenlő a két kör sugarának különbségével, azért a két kör egymást csakugyan belülről érinti.

2°. Legyen a háromszöget kívülről érintő körök egyikének középpontja O_2 , sugara $O_2D_1 = r_1$.



Az $O_1F_1O_2$ derékszögű háromszögből az O_1O_2 centrális négyzete:

$$(2) \quad \overline{O_1O_2}^2 = \overline{O_2F_1}^2 + \overline{O_1F_1}^2.$$

De

$$O_2F_1 = O_2D_1 + O_1E = r_1 + \frac{R}{2} \cos(\beta - \alpha)$$

és

$$O_1F_1 = ED_1 = C'A - AD_1 + C'E.$$

Míthogy pedig

$$AD_1 = BD = s - b,$$

azért

$$\begin{aligned} O_1F_1 &= \frac{c}{2} - (s - b) + \frac{R}{2} \sin(\beta - \alpha) \\ &= \frac{b - a}{2} + \frac{R}{2} \sin(\beta - \alpha) \\ &= R(\sin \beta - \sin \alpha) + \frac{R}{2} \sin(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

s így

$$\begin{aligned} \overline{O_1O_2}^2 &= \left[r_1 + \frac{R}{2} \cos(\beta - \alpha)\right]^2 + \left[R(\sin \beta - \sin \alpha) - \frac{R}{2} \sin(\beta - \alpha)\right]^2 \\ &= r_1^2 + \frac{R^2}{4} + Rr_1 \cos(\beta - \alpha) + R^2(\sin \beta - \sin \alpha) \times \\ &\quad \times [(\sin \beta - \sin \alpha) + \sin(\beta - \alpha)] \\ &= r_1^2 + \frac{R^2}{4} + Rr_1 - 2Rr_1 \sin^2 \frac{\beta - \alpha}{2} + 4R^2 \cos \frac{\beta + \alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta - \alpha}{2} \times \\ &\quad \times \left(\cos \frac{\beta + \alpha}{2} - \cos \frac{\beta - \alpha}{2}\right) \\ &= \left(r_1 + \frac{R}{2}\right)^2 - 2Rr_1 \sin^2 \frac{\beta - \alpha}{2} + 8R^2 \sin^2 \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \times \\ &\quad \times \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Minthogy pedig

$$4R \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = r_1$$

azért

$$\overline{O_1O_2}^2 = \left(r_1 + \frac{R}{2}\right)^2 - 2Rr_1 \sin^2 \frac{\beta - \alpha}{2} + 2Rr_1 \sin^2 \frac{\beta - \alpha}{2}$$

vagyis

$$O_1O_2 = r_1 + \frac{R}{2}.$$

Minthogy tehát a centrális a két kör sugarának összegével egyenlő, a két kör egymást kívülről érinti. Ugyanezt hasonlóképp kimutathatjuk a másik két kívülről érintő körrel is.

(Friedmann Bernát.)

A feladatot még megoldották: Riesz Frigyes műegyetemi hallgató és Kornis Ödön.