

Ha a CD húr E középpontjának távolságát a kör középpontjától x -szel, CE -t y -nal, és a négyszög területét t -vel, a kör sugarát r -rel jelöljük, úgy

$$(1) \quad x^2 + y^2 = r^2$$

$$(2) \quad (x + r)y = \frac{t}{2}$$

(2)-nek mindkét oldalát négyzetre emelve:

$$(3) \quad (x + r)^2 y^2 = \frac{t^2}{4}$$

(3)-ba y^2 -nek értékét (1)-ből helyettesítve:

$$(x + r)^2 (r^2 - x^2) = \frac{t^2}{4}$$

vagy

$$(4) \quad (r + x)(r + x)(r + x)(r - x) = \frac{t^2}{4}$$

vagy az egyenlet mindkét oldalát 3-mal megszorozva:

$$(r + x)(r + x)(r + x)(3r - 3x) = \frac{3t^2}{4}.$$

De az egyenlet bal oldalán álló tényezők összege $(6r)$ egy állandó szám, miért is a négyszög területe akkor lesz a lehető legnagyobb, ha a tényezők egyenlők (lásd: jegyzet); t tehát akkor maximum, ha

$$3r - 3x = r + x$$

vagyis ha:

$$x = \frac{r}{2}.$$

E szerint a legnagyobb területű négyszög CD oldalát megkapjuk, ha egy tetszőszerinti OP sugárnak középpontjában merőleges húrt emelünk; a négyszög AB oldalát megkapjuk, ha az OP sugarat a kör középpontján túl a kör kerületéig meghosszabbítjuk s az így nyert pontban érintőt szerkesztünk.

Jegyzet. Ha az állandó k számot különbözőképpen bontjuk fel pozitív összeadandókra, úgy ezen összeadandók szorzata akkor a legnagyobb, ha azok egyenlők. E tételt csak azon esetre bizonyítjuk be, ha a k számot négy részre bontjuk fel. Legyenek a részek, melyeknek összege k , x , y , u , v . Kimutatjuk, hogy ha

$$(1) \quad x_1 + y_1 + u_1 + v_1 = k$$

s pl. x_1 nem egyenlő y_1 -gyel, úgy az $x_1 y_1 u_1 v_1$ szorzat nem lehet az $xyuv$ szorzatnak legnagyobb értéke. Legyenek e végből a k szám részei:

$$\frac{x_1 + y_1}{2}, \frac{x_1 + y_1}{2}, u_1, v_1,$$

úgy az (1) alatti feltétel mellett:

$$\frac{x_1 + y_1}{2} + \frac{x_1 + y_1}{2} + u_1 + v_1 = k$$

de ismeretes, hogy:

$$\frac{x_1 + y_1}{2} \cdot \frac{x_1 + y_1}{2} > x_1 y_1$$

s így:

$$\frac{x_1 + y_1}{2} \cdot \frac{x_1 + y_1}{2} u_1 v_1 > x_1 y_1 u_1 v_1.$$

Látjuk, hogy a szorzat nem lehet maximum, ha a tényezők nem egyenlők.

A feladatot megoldották: Beck Ferencz, Friedmann Bernát, Szabó István, Szabó Károly.