

I. Megoldás. Legyen P oly pont, mely a feladat követelményeinek megfelel. Minthogy a PB egyenes az APC szöget felezi, mondhatjuk, hogy:

$$AP : CP = AB : BC.$$

A feladatot tehát még így is fogalmazhatjuk: Keressük azon háromszögek csúcsainak mértani helyét, melyeknek közös alapja AC , másik két oldaluk állandó aránya pedig $AB : BC$.

Legyen A a koordinata-rendszer kezdőpontja, továbbá: $AB = p$, $BC = q$; P pont koordinátái: $AD = x$, $PD = y$. Az ADP derékszögű háromszögből:

$$(1) \quad \overline{AP}^2 = x^2 + y^2$$

CDP háromszögből:

$$(2) \quad \overline{CP}^2 = (p + q - x)^2 + y^2$$

Osszuk (1)-et (2)-vel és vegyük figyelembe, hogy $\frac{AP}{CP} = \frac{p}{q}$, úgy:

$$(3) \quad \frac{p^2}{q^2} = \frac{x^2 + y^2}{(p + q - x)^2 + y^2}$$

mely egyenletből ered, hogy

$$x^2 - \frac{2p^2x}{p - q} + y^2 = -\frac{p^2(p + q)}{p + q}$$

$$\left(x - \frac{p^2}{p - q}\right)^2 + (y - 0)^2 = \left(\frac{pq}{p - q}\right)^2.$$

Ez egyenlet mutatja, hogy a *keresett mértani hely kör*, melynek középpontja az AC egyenesen fekszik, sugara pedig $+\frac{pq}{p - q}$. Keressük még meg a kör és AC egyenes metszéspontjainak abszcisszáit. Ha $y = 0$, úgy $x_1 = \frac{p(p + q)}{p - q}$ és $x_2 = p$; látjuk, hogy a kör mindig keresztül megy a B ponton.

Ha $p = q$, úgy $\frac{p^2}{p - q} = \infty$, azaz a mértani hely egyenes és pedig az AC egyenes középpontjában emelt merőleges.

(Friedmann Bernát.)

II. Megoldás. Az AB és BC távolságok fölé megrajzoljuk az APC háromszöget, melynél $AP : CP = AB : BC$. Ezen háromszögnek P csúcsában, PB -re merőlegest emelünk, mely az AC egyenest F -ben metszi. A keresett mértani hely az F , P és B pontok által meghatározott kör.

Bizonyítás. PB szögfelező, mert AB és BC aránya egyenlő AP és CP arányával. Az oly pontok mértani helye pedig, melyeknek két ponttól (A és C) való távolságainak aránya egyenlő, azon kör, mely a B , F és P pontokon megy át. E kört *Apollonius-féle körnek* nevezzük. Az A , B , C és F pontok harmonikus pontok.

(Roth Miksa, főreáliskolai VI. o. t., Pécs.)

A feladatot még megoldották: Beck F., Dénes A., Devecis M., Goldstein Zs., Goldziher K. és Kármán T., Kornis Ö., Misángyi V., Prakatur T., Spitzer Ö., Szabó I., Szabó K., Weisz Á.