

I. Megoldás. Ha az adott kifejezés $(x^2 - 1)$ -gyel osztható, akkor kell hogy az

$$x^4 + px^2 + qx + a^2 = 0$$

egyenletet az $x = 1$ és $x = -1$ gyökök kielégítsék; vagyis kell, hogy az adott kifejezés az $x = 1$ és $x = -1$ értékek mellett megsemmisüljön. Áll tehát, hogy

$$1 + p + q + a^2 = 0 \text{ és } 1 + p - q + a^2 = 0,$$

miből $q = 0$ és $p = -(a^2 + 1)$; p -nek és q -nak ezen értékei mellett a megadott kifejezés következőképp alakul:

$$x^4 - (a^2 + 1)x^2 + a^2 = (x^2 - 1)(x^2 - a^2),$$

mely $(x^2 - a^2)$ -tel csakugyan osztható.

(Weisz Lipót.)

II. Megoldás. Az osztást mindkét esetben elvégezve, a következő maradékokat kapjuk:

$$qx + a^2 + p + 1 \text{ és } qx + a^2(a^2 + p + 1).$$

Hogy az első maradék x -nek bármely értéknél megsemmisüljön, kell hogy legyen:

$$q = 0 \text{ és } a^2 + p + 1 = 0.$$

Látni való, hogy e feltételek mellett a második maradék is nulla lesz.

Fordítva azonban a tétel nem áll, mert a második maradék akkor is megsemmisül, ha $q = 0$ és $a^2 = 0$, mely esetben az első maradék nem nulla.

Megoldások száma: 19.