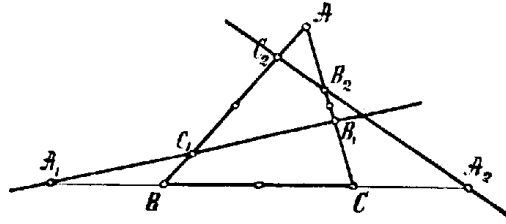


1°. Tegyük fel, hogy az A_1 , B_1 és C_1 pontok egy egyenesbe esnek; bizonyítsuk be, hogy az A_2 , B_2 és C_2 pontok is egy egyenesbe esnek, föltéve, hogy az A_1 , A_2 , a B_1 , B_2 és C_1 , C_2 pontok a megfelelő oldalt felező ponthoz képest szimmetrikusan fekszenek.



Miután az A_1 , B_1 és C_1 pontok egy egyenesbe esnek, a Menelaos-féle tétel értelmében:

$$\frac{A_1C}{A_1B} \cdot \frac{C_1B}{C_1A} \cdot \frac{B_1A}{B_1C} = 1$$

De a föltétel szerint:

$$A_1B = A_2C, \quad A_1C = A_2B, \quad B_1C = B_2A, \quad B_1A = B_2C, \quad C_1A = C_2B, \quad C_1B = C_2A$$

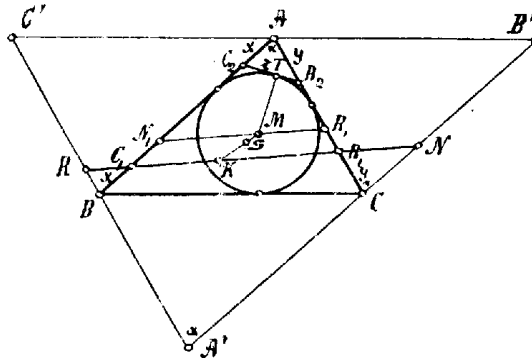
tehát

$$\frac{A_2C}{A_2B} \cdot \frac{C_2B}{C_2A} \cdot \frac{B_2A}{B_2C} = 1$$

a mi azt mondja, hogy az A_2 , B_2 és C_2 pontok szintén egy egyenesbe esnek.

2°. Legyenek az ABC háromszög oldalai a , b és c ; C_2B_2 az egyik egyenes, mely a háromszögbe írható kört T pontban érinti, C_1B_1 a másik egyenes. Húzzunk az ABC háromszög csúcsain keresztül a szemközt fekvő oldalakkal párhuzamosokat; ez által az $A'B'C'$ háromszöget nyerjük, mely ABC háromszöghöz hasonló; belső hasonlósági pontjuk S -ben, a két háromszög közös súlypontjában van. Legyen C_1B_1 -nek $A'C'$, illetőleg $A'B'$ -tel való metszéspontja R , illetőleg N . Vonjunk M ponton keresztül RN -nel párhuzamost és legyen e párhuzamosnak az AC , illetőleg AB oldalakkal való metszéspontja R_1 , illetőleg N_1 . Legyen végre

$$BC_1 = AC_2 = x, \quad CB_1 = AB_2 = y \quad \text{és} \quad C_2B_2 = z.$$



A B_1CN és B_1AC_1 háromszögek hasonlóságából következik, hogy:

$$\frac{CN}{c-x} = \frac{y}{b-y}$$

honnan

$$CN = \frac{y(c-x)}{b-y}$$

és így

$$(1) \quad A'N' = A'C + CN = c + \frac{y(c-x)}{b-y} = \frac{bc-xy}{b-y}$$

Hasonlóképpen levezethető, hogy:

$$A'R = \frac{bc-xy}{c-x}$$

De az $A'NR$ háromszögnek az NR oldalhoz tartozó szögfelezőjének a hossza.

$$v = \frac{2A'N \cdot A'R}{A'N + A'R} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \frac{\frac{(bc-xy)^2}{(b-y)(c-x)}}{\frac{bc-xy}{b-y} + \frac{bc-xy}{c-x}} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{2(bc-xy)}{b+c-x-y} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Az AN_1R_1 háromszögnek az N_1R_1 oldalhoz tartozó szögfelezője pedig, mint az ABC háromszög BC oldalához tartozó szögfelezőjének $AM = v_1$ része:

$$v_1 = \frac{2bc}{a+b+c} \cos \frac{\alpha}{2}$$

és így

$$(2) \quad v : v_1 = \frac{bc - xy}{b + c - x - y} : \frac{bc}{a + b + c}$$

MT , mint az ABC háromszögbe írható kör sugara:

$$MT = \frac{bc \sin \alpha}{a + b + c}$$

és mint az AC_2B_2 háromszöget kívülről érintő körnek a sugara:

$$MT = \frac{xy \sin \alpha}{x + y - z}$$

és így

$$(3) \quad \frac{bc}{a + b + c} = \frac{xy}{x + y - z}$$

a (2) aránylat tehát így alakul.

$$(4) \quad v : v_1 = \frac{bc - xy}{b + c - x - y} : \frac{xy}{x + y - z}$$

A (3)-ból következik, hogy

$$\frac{bc}{xy} = \frac{a + b + c}{x + y - z}$$

és

$$\frac{bc - xy}{xy} = \frac{b + c - x - y + a + z}{x + y - z}$$

De a BCB_2C_2 négyszög érintő négyszög lévén:

$$b + c - x - y = a + z$$

és így

$$\frac{bc - xy}{xy} = \frac{2(b + c - x - y)}{x + y - z}$$

honnan

$$\frac{bc - xy}{b + c - x - y} = \frac{2xy}{x + y - z}$$

és a (4) aránylat következőképp alakul

$$v : v_1 = \frac{2xy}{x + y - z} : \frac{xy}{x + y - z}$$

vagyis

$$v = 2v_1.$$

Az $A'NR$ és AN_1R_1 hasonló háromszögekben tehát a megfelelő szögfelezők aránya $2 : 1$, miből következik, hogy

$$NR : N_1R_1 = 2 : 1$$

és

$$NR = 2N_1R_1$$

Az NR és N_1R_1 egyenesek tehát az $A'B'C'$ és ABC hasonló háromszögekben megfelelő egyenesek; s miután a K és M pontok megfelelő egyeneseken fekszenek és összeköttetésük a hasonlósági ponton, S -en megy keresztül, következik, hogy:

$$SK : SM = 2 : 1.$$

Látni való, hogy a K pont nem más, mint az $A'B'C'$ háromszögbe írható kör középpontja.

(Weisz Lipót, Pécs.)

A feladatot még megoldotta: Visnya Aladár.