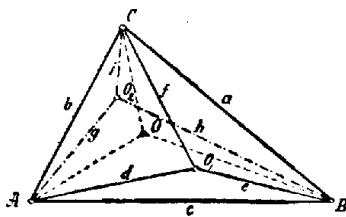


I. *Megoldás.*



1.° O_1AB , O_1BC és O_1CA háromszögekből kapjuk, hogy

$$\frac{d}{e} = \frac{\sin(ce)}{\sin(cd)}, \quad \frac{e}{f} = \frac{\sin(af)}{\sin(ae)},$$

$$\frac{f}{d} = \frac{\sin(bd)}{\sin(bf)},$$

ezen egyenleteket egymással szorozva:

$$(1) \quad \frac{\sin(af) \cdot \sin(bd) \cdot \sin(ce)}{\sin(ae) \cdot \sin(bf) \cdot \sin(cd)} = 1.$$

Ez kriteriuma annak, hogy a három egyenes (d , e , f) egy pontban találkozik; (g , h , i) egyenesek is egy pontban metszik egymást, ha

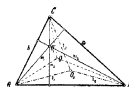
$$(2) \quad \frac{\sin(ah) \cdot \sin(bi) \cdot \sin(cg)}{\sin(ai) \cdot \sin(bg) \cdot \sin(ch)} = 1.$$

A feltételek értelmében:

$$(ah) = (ce), \quad (bi) = (af), \quad (cg) = (bd), \quad (ai) = (bf), \quad (bg) = (cd), \quad (ch) = (ae);$$

ezeket (2)-be téve, csakugyan az (1) alatti egyenletet kapjuk.

2.° (bm_3) és (cm_2) szögek egyenlők, mert száraik egyenlők.



De

$$(bm_3) = (ar_3) \text{ és } (cm_2) = (ar_2),$$

tehát

$$(ar_3) = (ar_2),$$

vagyis $BO_2C\triangle$ egyenlő szárú háromszög s így $BO_2 = CO_2$. Épp így kimutathatjuk, hogy $AO_2 = BO_2 = CO_2$; ezek tehát a háromszög köré írható kör sugarai és O_2 a kör középpontja.

3.°

$$(3) \quad (ab) + (bc) + (ca) = 180^\circ,$$

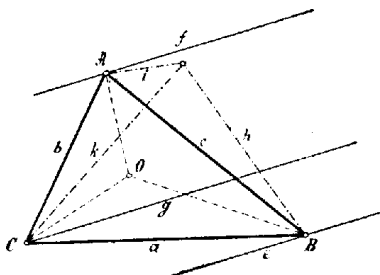
de

$$(ab) = (ag) + (gb)$$

$$(ag) = (ae) = (ch) \text{ és } (gb) = (bf) = (ci),$$

tehát

$$(4) \quad (ab) = (ch) + (ci)$$



(4)-et (3)-ba téve:

$$(ch) + (ca) + (ci) + (bc) = 180^\circ,$$

vagyis

$$(ah) + (bi) = 180^\circ;$$

$ACBO_1$ tehát húrnégyszög s így O_1 az ABC háromszög köré írható kör kerületén fekszik.

(Strasser G. Sándor, I. é. bölcsészethallgató, Budapest.)

II. *Megoldás.* 1.° Legyenek AA'' és AA' , BB'' és BB' , CC'' és CC' a megfelelő szögfelezőkhöz képest szimmetrikusan fekvő egyenesek; bebizonyítandó, ha a Ceva-féle tétel értelmében:

$$(1) \quad \frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} = -1,$$

akkor

$$(2) \quad \frac{C''A}{C''B} \cdot \frac{A''B}{A''C} \cdot \frac{B''C}{B''A} = -1,$$

Kimutathatjuk, hogy

$$\frac{A''B}{A''C} \cdot \frac{A'B}{A'C} = \frac{c^2}{b^2}, \quad \frac{B''C}{B''A} \cdot \frac{B'C}{B'A} = \frac{a^2}{c^2}, \quad \frac{C''A}{C''B} \cdot \frac{C'A}{C'B} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Ezen egyenleteket egymással szorozva s (1)-et tekintetbe véve, csakugyan (2)-t kapjuk.

2.° A tétel második részének bebizonyítása végett elégséges kimutatnunk azt, hogy a háromszög AA' magassága és az AO egyenes (O a háromszög köré írható kör középpontja) szimmetrikusan fekszenek a szögfelezőhöz képest. E végből nyújtsuk meg az AO sugarat, míg a kört P -ben metszi. Ekkor $ABC\angle = APC\angle$, mint ugyanazon íven nyugvó kerületi szögek; így tehát $90^\circ - ABC\angle = 90^\circ - APC\angle$, vagyis $\angle BAA' = \angle PAC$, a mi azt mondja, hogy OA és AA' szimmetrikusan fekszenek az A szöget felező egyeneshez képest.

(Weisz Lipót, Pécs.)

III. *Megoldás.* 1.° A háromszög szögei 2α , 2β , 2γ . Az egyeneseknek a szögfelezőkkel képezett szögei megfelelő sorrendben δ , ε , η . Három egyenes O' pontban, másik két $-C$ -ből és B -ből vont - egyenes O'' pontban találkozik. O'' -t A -val egybekötve, $AOO'' = \varphi$ szöget nyerünk (a szögfelezők O -ban metszik egymást); a tétel első része helyes, ha $\varphi = \delta$. Az első megoldáshoz hasonló úton találjuk, hogy $\frac{\sin(\alpha + \delta)}{\sin(\alpha - \delta)} = \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin(\alpha - \varphi)}$; az összegek, illetőleg különbségek függvényeinek kifejtése és az egyenlet rendezése után kitűnik, hogy $\varphi = \delta$.

(Riesz Frigyes, Győr.)

A feladatot még megoldották: Visnya Aladár, I. é. b. h., Bálint Béla, Freund Antal, Friedmann Bernát, Grünhut Béla, Hofbauer Ervin, Kántor Nándor, Klein Mór, Kornis Ödön.