

Legyen $BP = x$, $CQ = y$, $BC = c$. A feladat értelmében:

$$(1) \quad \overline{PQ}^2 = \overline{PA}^2 + \overline{AQ}^2.$$

De

$$(2) \quad \overline{PQ}^2 = c^2 + (x - y)^2 = 3a^2 + x^2 - 2xy + y^2$$

$$(3) \quad \overline{PA}^2 = a^2 + x^2$$

$$(4) \quad \overline{AQ}^2 = a^2 + y^2$$

(2)-t, (3)-at és (4)-et (1)-be téve, kapjuk, hogy

$$a^2 - 2xy = 0$$

miből

$$(5) \quad xy = \frac{a^2}{2}.$$

A második feltétel értelmében a gúla térfogata m^3 ; a gúla alapja $PQCB$ trapéz, melynek területe:

$$t = \frac{(x + y)c}{2} = \frac{a(x + y)\sqrt{3}}{2},$$

magassága pedig az ABC egyenlő szárú háromszög magassága:

$$h = a \sin 30^\circ = \frac{a}{2}$$

és így a gúla térfogata:

$$m^3 = \frac{(x + y)a^2\sqrt{3}}{12}$$

miből

$$(6) \quad (x + y) = \frac{4m^3\sqrt{3}}{a^2}$$

(5) és (6) szerint x és y a következő egyenletnek gyökei:

$$z^2 - \frac{4m^3\sqrt{3}}{a^2}z + \frac{a^2}{2} = 0.$$

Az egyenletet megoldva, kapjuk:

$$x = \frac{4m^3\sqrt{3} + \sqrt{48m^6 - 2a^6}}{2a^2}, \quad y = \frac{4m^3\sqrt{3} - \sqrt{48m^6 - 2a^6}}{2a^2}.$$

A gyökök valósak, ha:

$$48m^6 \geq 2a^6$$

vagy

$$(4\sqrt{3}m^3 + a^3\sqrt{2})(4\sqrt{3}m^3 - a^3\sqrt{2}) \geq 0,$$

a mihez szükséges, hogy :

$$m^3 \geq \frac{a^3\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}$$

vagy

$$m^3 \geq \frac{a^3\sqrt{6}}{12}.$$

Ha

$$m^3 = \frac{a^3\sqrt{6}}{12},$$

akkor:

$$x = y = \frac{4m^3\sqrt{3}}{2a^2} = \frac{2\sqrt{3}a^3\sqrt{6}}{12a^2} = \frac{a\sqrt{18}}{6}$$

vagy

$$x = y = \frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

(Riesz Frigyes, főgymn. VIII. o.t., Győr.)

A feladatot még megoldották: Friedmann Bernát, Goldstein Zsigmond, Grünhut Béla, Hofbauer Ervin, Kántor Nándor, Klein Mór.