

Első megoldás.

A magasságok metszési pontja egyenlő távolságban van a tetraéder csúcsaitól, valamint a lapoktól is, miért is ezen pont középpontja azon gömböknek, melyek a tetraéderbe és a tetraéder köré írhatók. Ha e pontot a tetraéder csúcsaival összekötjük, úgy négy egyenlő köbtartalmú gúlát nyerünk, melyeknek alapja a tetraédernek egy-egy oldallapja, magassága a beírtató gömb sugara. A tetraéder köbtartalma:

$$(1) \quad V = \frac{a^3}{12} \sqrt{2}$$

Tehát egy gúla köbtartalma:

$$(2) \quad v = \frac{a^3}{48} \sqrt{2}$$

A tetraéder egy oldallapjának a területe:

$$(3) \quad t = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}$$

s így egy gúla magassága, mely egyúttal a beírt gömb sugara:

$$(4) \quad r = \frac{a}{4} \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a}{12} \sqrt{6}$$

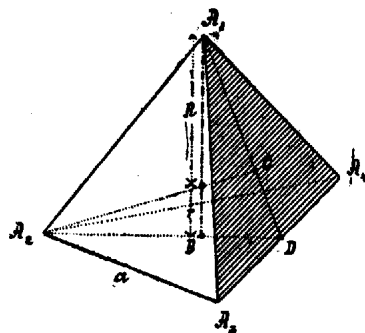
A tetraéder köré írt gömb sugarát megkapjuk, ha a beírt gömb sugarát a tetraéder magasságából kivonjuk; a tetraéder magassága: $a\sqrt{\frac{2}{3}}$, s így

$$(5) \quad R = a\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{a}{4}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{3a}{4}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a}{4}\sqrt{6}$$

(Hofbauer Ervin, főgymn. VII. o.t., Budapest, ág. h. ev. főgymn.)

Második megoldás.

A tetraéder köré írható gömb sugara $R = OA_1$, a tetraéderbe írható gömb sugara $OB = r$; O a magasságok metszési pontja.



A tetraéder magassága: $a\sqrt{\frac{2}{3}}$; tehát

$$(1) \quad A_1B = a\sqrt{\frac{2}{3}} = A_1O + OB = R + r$$

Mínt hogy A_3BD és A_1CO háromszögek hasonlóak, következik, hogy

$$A_1O : A_1D = OC : BD$$

$$R : A_1D = r : \frac{A_1D}{3}$$

s így

$$(2) \quad R = 3r$$

(1)-ből és (2)-ből kapjuk:

$$R = \frac{3a}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad r = \frac{a}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

(Suschnik József, főreáliskolai VIII. o.t., Kecskemét.)

A feladatot még megoldották: Friedmann Bernát, S.-A.-Ujhely; Grünhut Béla és Visnya Aladár, Pécs.