

$$(1) \quad \sqrt[3]{x+a} - \sqrt[3]{x-a} = b$$

Első megoldás.

Az egyenlet két oldalát köbre emelve, kapjuk:

$$x+a - 3\sqrt[3]{(x+a)^2\sqrt[3]{x-a}} + 3\sqrt[3]{x+a}\sqrt[3]{(x-a)^2} - x+a = b^3$$

$$3\sqrt[3]{(x+a)(x^2-a^2)} - 3\sqrt[3]{(x-a)(x^2-a^2)} = 2a - b^3$$

$$(2) \quad 3\sqrt[3]{x^2-a^2}[\sqrt[3]{x+a} - \sqrt[3]{x-a}] = 2a - b^3$$

a zárójelben álló kifejezés (1) szerint b -vel egyenlő, s így:

$$3b\sqrt[3]{x^2-a^2} = 2a - b^3$$

Ezen egyenlet mindkét oldalát ismét köbre emelve:

$$27b^3(x^2-a^2) = (2a-b^3)^3$$

miből

$$(3) \quad x^2 = \frac{(2a-b^3)^3}{27b^3} + a^2$$

(Visnya Aladár, főreálisk. VIII. o. t., Pécs.)

Jegyzet. A (3) alatti kifejezés még így is írható:

$$(4) \quad x^2 = \frac{8a^3 + 15a^2b^3 + 6ab^6 - b^9}{27b^3}$$

A számláló $a+b^3$ kifejezéssel osztható, mert a helyébe $(-b^3)$ -t téve, a számláló nulla lesz; így tehát kapjuk:

$$8a^3 + 15a^2b^3 + 6ab^6 - b^9 = (a+b^3)(8a^2 + 7ab^3 - b^6)$$

s minthogy

$$8a^2 + 7ab^3 - b^6 = (a+b^3)(8a-b^3)$$

kapjuk:

$$x^2 = \frac{(a+b^3)^2(8a-b^3)}{27b^3}$$

$$x = \pm(a+b^3)\sqrt{\frac{8a-b^3}{27b^3}}$$

Második megoldás.

A megadott egyenlet így is írható:

$$(1) \quad \sqrt[3]{x+a} = b + \sqrt[3]{x-a}$$

ezen egyenletnek mindkét oldalát köbre emelve s az egyenletet rendezve, kapjuk:

$$(2) \quad 3b(\sqrt[3]{x-a})^2 + 3b^2\sqrt[3]{x-a} + b^3 - 2a = 0$$

ezen egyenlet $\sqrt[3]{x-a}$ -ra nézve másodfokú, s így:

$$\sqrt[3]{x-a} = \frac{-3b^2 \pm \sqrt{24ab - 3b^4}}{6b}$$

$$(3) \quad x = \left[-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{8a-b^2}{12b}} \right]^3 + a$$

(Geist Emil, főreáliskolai VII. o. t., Győr.)

Jegyzet. Ha a zárójelben álló kifejezést köbre emeljük, könnyen nyerjük, hogy

$$x = \pm \frac{8b^3 + 8a}{12b} \sqrt{\frac{8a - b^3}{12b}}$$

vagy

$$x = \pm (a + b^3) \sqrt{\frac{8a - b^3}{27b^3}}$$

A feladatot még megoldották: Adonyi Dénes, főgymn. VII. o. t., S.-A.-Ujhely, Friedmann Bernát, főgymn. VII. o. t.,

S.-A.-Ujhely, Goldstein Zsigmond, főgymn. VII. o. t., Nyíregyháza; Grünhut Béla, főreál. VII. o. t., Pécs; Hofbauer Ervin és Kántor Nándor, főgymn. VII. o. t., Budapest; Messinger Ábrahám főgymn. VII. o. t. és Weisz Hermann főgymn. VI. o. t., S.-A.-Ujhely.