

1°. Ha a háromszög területe t , az oldalak a , b , c , akkor:

$$(1) \quad 16t^2 = (a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$$

$$2t = am_1 = bm_2 = cm_3,$$

miből

$$(2) \quad a = \frac{2t}{m_1}, \quad b = \frac{2t}{m_2}, \quad c = \frac{2t}{m_3}$$

Ezen értékeket 1)-be téve, kapjuk:

$$(3) \quad 16t^2 = 16t^4 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \right) \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} - \frac{1}{m_1} \right) \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3} - \frac{1}{m_2} \right) \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_3} \right)$$

miből a háromszög területe:

$$(4) \quad t = \frac{(m_1 m_2 m_3)^2}{\sqrt{[(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3)(m_1 m_3 + (m_1 m_2 - m_2 m_3)(m_2 m_3 + m_1 m_2 - m_1 m_3)(m_2 m_3 + m_1 m_3 - m_1 m_2)]}}$$

Az oldalakat a (2) alatti egyenletekből számítjuk ki.

Hogy a szögeket kiszámíthassuk, a háromszöget szétbontjuk derékszögű háromszögekre; így kapjuk:

$$(5) \quad \sin \alpha = \frac{m_2}{c}, \quad \sin \beta = \frac{m_3}{a}, \quad \sin \gamma = \frac{m_1}{b}$$

vagy a (2) alatti értékeket helyettesítve:

$$(6) \quad \sin \alpha = \frac{m_2 m_3}{2t}, \quad \sin \beta = \frac{m_1 m_3}{2t}, \quad \sin \gamma = \frac{m_1 m_2}{2t}$$

2°. A megadott magasságokból háromszöget szerkesztünk, melynek magasságai legyenek: μ_1 , μ_2 , μ_3 . E magasságokból, mint oldalakból újra háromszöget szerkesztünk; ekkor:

$$(7) \quad am_1 = bm_2 = cm_3$$

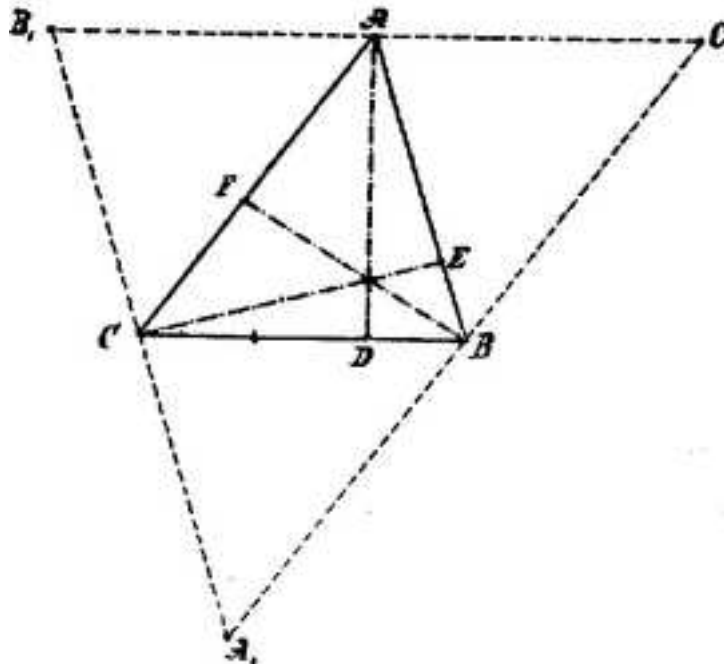
$$(8) \quad \mu_1 m_1 = \mu_2 m_2 = \mu_3 m_3$$

e két egyenletből kapjuk:

$$(9) \quad \frac{a}{\mu_1} = \frac{b}{\mu_2} = \frac{c}{\mu_3}$$

Ebből látjuk, hogy a μ_1 , μ_2 és μ_3 -ból alakított háromszög hasonló a szerkesztendő háromszöghöz. Ennélfogva meghosszabítjuk a μ_1 -hez tartozó magasságot, rámérjük m_1 -et s ennek végpontján át μ_1 -el párhuzamosot húzunk s végre meghosszabbítjuk még a μ_2 és μ_3 oldalakat, míg azok a μ_1 -gyel párhuzamosan rajzolt egyenest metszik.

3°. A , B és C csúcsokon át a szemben fekvő oldalakkal párhuzamosokat húzunk, miáltal $A_1 B_1 C_1$ háromszöget nyerjük.



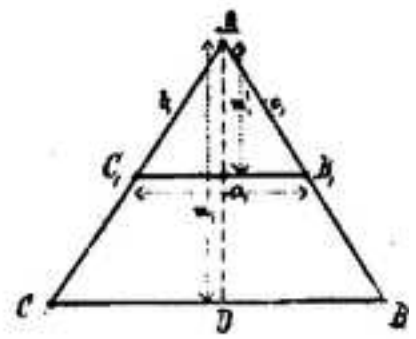
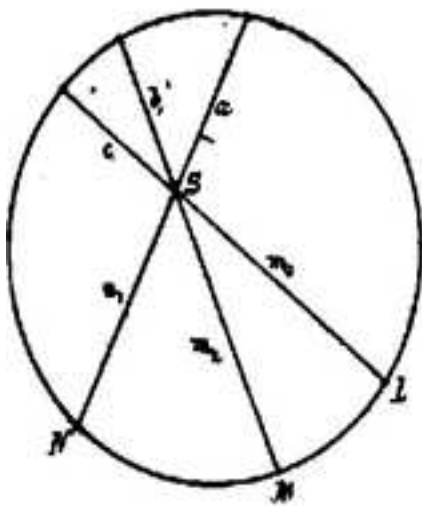
E háromszög oldalai az ABC háromszög megfelelő oldalainak kétszeresei s A , B és C pontok által feleztetnek. Mert hisz $ACBA_1$ és $CBAC_1$ egyenközényekben

$$AC = A_1B = BC_1$$

Az eredeti háromszög magasságai tehát az $A_1B_1C_1$ háromszög oldalainak középpontjaiban emelt merőlegesek s mint ilyenek egy pontban metszik egymást.

(Pósch Gyula, a budapesti ág. h. evang. főgymn. VIII. o. t.).

Jegyzet. A háromszög még így is szerkeszthető: Rajzolunk három, egymást egy pontban – S -ben – metsző egyenest, melyekre a megadott magasságokat rámérjük. Az így nyert L , M , N pontokon át kört fektetünk, a magasságokat ellenkező irányban meghosszabbítjuk, mi által a_1 , b_1 , c_1 egyeneseket nyerjük. Ezeket egy háromszög oldalainak tekintve, megrajzoljuk AC_1B_1 háromszöget. E háromszög magasságai legyenek m'_1 , m'_2 , m'_3 ; m'_1 -re rámérjük m_1 -et, és D ponton át C_1B_1 oldallal párhuzamost húzunk. ABC a keresett háromszög.



Meg kell mutatnunk, hogy B pontból rajzolt magasság egyenlő m_2 -vel és a C pontból rajzolt magasság egyenlő m_3 -mal.

Miután az egymást metsző hűrok metszeteinek szorzatai egyenlők, írhatjuk:

$$a_1m_1 = b_1m_2 = c_1m_3,$$

továbbá

$$a_1m'_1 = b_1m'_2 = c_1m'_3,$$

miből

$$\frac{m_1}{m'_1} = \frac{m_2}{m'_2} = \frac{m_3}{m'_3}$$

De ABC és AB_1C_1 háromszögek hasonlók; ha tehát m'_1 -et egyenlővé tesszük m_1 -gyel, akkor m'_2 -ből m_2 és m'_3 -ből m_3 lesz.

A feladatot megoldották: Friedmann Bernát, S.-A.-Ujhely; Szabó István, Debreczen; Geist Emil és Szabó Gusztáv, Győr; Grünhut Béla és Visnya Aladár, Pécs.