Oldassék meg a következő egyenlet:

$$\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}=1.$$

Az a és b mely értékeinél lesznek az egyenlet gyökei valósak?

Ha négyzetre emeljük az egyenlet két oldalát és eltávolítjuk a nevezőket, a következő egyenletet nyerjük:

$$(1-ax)^2(1+bx)=(1+ax)^2(1-bx),$$

vagy rendezve ezt

$$a^2bx^3-(2a-b)x=0$$

Ezen egyenlet gyökei

$$1^\circ \qquad x=0$$

$$2^\circ \qquad x=\pm\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a-b}{b}}$$

Hogy ezek valósak legyenek, kell, hogy

$$\frac{a}{b}\geq\frac{1}{2}$$

Szerkesztő jegyzete:

A 2) alatti egyenlet gyökei az 1) alatti egyenletet kielégítik ugyan, de bizonyos esetekben csak a négyzetgyök *positív*, másokban meg annak *negatív* értéke mellett. Hogy a gyök positív értéke mellett a 2) gyökei egyszersmind az 1) gyökei is legyenek, kell, hogy az

$$\frac{1-ax}{1+ax}$$

és vele együtt az

$$(1-ax)(1+ax)=(1-a^2x^2)$$

kifejezés positív legyen, ha x helyébe a 2) egyenlet gyökeit tesszük, vagyis ha

$$1-\frac{2a-b}{a}>0$$

vagyis ha

$$\frac{a}{b}<1$$

Hogy tehát az 1) alatti egyenletet kielégítsék a 2) gyökei a négyzetgyök positív értékei mellett, kell, hogy $\frac{a}{b}$ az $\frac{1}{2}$ és 1 közé essék.

Ha $\frac{a}{b}>1$ a 2) gyökei az

$$\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}=-1$$

egyenletet elégítik ki, hol a négyzetgyökét ismét positív értékűnek vesszük.

Ha $\frac{a}{b}=1$ a 2) gyökei közül csak az $x=0$ elégíti ki az 1) alatti egyenletet, míg az $x=+\frac{1}{a}=+\frac{1}{b}$ az 1)-nek egyáltalában nem is gyöke.

A feladatot megoldották: Budapesti ág. hitv. ev. főgymn. VII. osztálya; Grossmann Gusztáv fg. VIII. Budapest; Grünhut Béla; fr. VI. Pécs; ifj. Imre János, fg. VIII. Nyíregyháza; Reif Jenő, fr. VI. Pécs; Weisz Lipót, fr. VI. Pécs.

Beérkezett még 10 megoldás, melyek részben hibásak, részben még annyira sem teljesek, mint a fenti 6 ifjú munkatársunké.