

Első megoldás.

Fentebbi feladat még így is fogalmazható: "Ha valamely P ponton keresztül húzok egyenest, mely a parabolát A és B pontokban metszi és a P pontnak távolságait az A és B pontokon keresztül menő parabola átmérőktől a és b -től egymással megszorozom, e szorzat független a P ponton keresztül húzott egyenes irányától."

Adjuk meg a parabolát gyújtópontja (F) és vezérvonala (d) által. A P pontot pedig a vezérvonal és a parabola-tengelytől mért távolságai x_0 és y_0 által. Az A és B pontokból a vezérvonalra húzott merőlegesek talppontjai legyenek A' és B' . Az F pontnak az AB szimmetriatengelyre vonatkoztatott szimmetrikus pontja legyen F' . Vége az FF' és a (d) egyenesek metszéspontja legyen N .

Mint hogy A és B a parabola pontjai, e pontokból mint középpontokból az AF és BF sugarakkal leírt körök keresztül mennek F' -en és a (d) -t A' és B' pontokban érintik.

Áll tehát, hogy

$$A'N^2 = B'N^2 = NF \times NF'$$

A P -ből a (d) -re húzott merőleges talppontját P' -tel jelölöm; bebizonyítandó, hogy

$$P'A' \times P'B' = \text{állandó}.$$

Legyen a parabolatengely és a vezérvonal metszéspontja O . A fönntebbi egyenlőség ekkor még így is írható:

$$(P'O + ON - A'N)(P'O + ON + B'N) = \text{állandó}$$

vagy minthogy

$$A'N = B'N$$

$$(P'O + ON)^2 - A'N^2 = \text{állandó}$$

Legyen FO egyenlő p -vel, az AB egyenesnek a vezérvonallal képezett szöge α -val.

Ekkor az utolsó egyenlőség még így is írható:

$$(y_0 + p \tan \alpha)^2 - NF \times NF' = \text{állandó}$$

De

$$NF = \frac{p}{\cos \alpha}$$

$$NF' = \frac{p}{\cos \alpha} + 2(x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p \cos \alpha)$$

tehát

$$\begin{aligned} NF \times NF' &= \frac{p^2}{\cos^2 \alpha} + 2px_0 + 2py_0 \tan \alpha - p^2 \\ &= 2px_0 + 2py_0 \tan \alpha + p^2 \tan^2 \alpha \end{aligned}$$

s ennél fogva kifejezésünk új alakja

$$y_0^2 + 2py_0 \tan \alpha + p^2 \tan^2 \alpha - 2px_0 - 2py_0 \tan \alpha - p^2 \tan^2 \alpha$$

vagyis

$$y_0^2 - 2px_0$$

mely kifejezés tényleg független α -tól.

(Meitner Elemér, főreálisk. VIII. o. t. Budapest)

Második megoldás.

Legyen a parabola egyenlete a tengely és a csúcserintőből álló rendszerre vonatkoztatva

$$y^2 = 2px.$$

A $P(x_0, y_0)$ ponton keresztül menő egyenes egyenlete

$$y - kx = y_0 - kx_0$$

Ekkor az egyenes és a parabola metszéspontjainak A -nak és B -nek ordinátáit a következő másodfokú egyenlet gyökei szolgáltatják:

$$y - k \frac{y^2}{2p} = y_0 - kx_0.$$

vagy

$$y^2 - \frac{2p}{k}y + \frac{2p}{k}y_0 - 2px_0 = 0.$$

A keresett kifejezés, melynek állandósága bizonyítandó

$$(y_0 - y_1)(y_0 - y_2) = y_0^2 - (y_1 + y_2) + y_1y_2.$$

De a fentebbi egyenletből

$$y_1 + y_2 = \frac{2p}{k},$$

$$y_1y_2 = \frac{2p}{k}y_0 - 2px_0;$$

ezeket a keresett kifejezés értékebe helyettesítve, az a következő alakot ölti:

$$y_0 - \frac{2p}{k}y_0 + \frac{2p}{k}y_0 - 2px_0.$$

vagy

$$y_0^2 - 2px_0,$$

mely alak k -től tényleg független.

Arany Dániel.