Harmadik megoldás Dr. Klug Lipót egyetemi magán tanár úrtól.

A feladat megoldása a hiperbola következő ismert tulajdonságára alapítható:

*A hiperbola egy változó érintője és a két aszimptotája oly háromszögeket kerítenek be, melyeknek területei egyenlők egymással.*

Osszuk az adott $ABC$ háromszög $BC$, $CA$, $AB$ oldalait az $A_1$, $A_2$; $B_1$, $B_2$; $C_1$, $C_2$ pontokban belsőleg $m : n = \lambda$ viszony szerint; az $AA_1$, $AA_2$, $BB_1, \ldots$ egyenesek az adott háromszöget $\lambda$ viszony szerint osztják.

$AB$, $AC$ egyenesek, mint egy hiperbola aszimptótái és $BA_2$ mint annak érintője meghatározzák a hiperbolát $\alpha$-t; ennek fő- és melléktengelye az $A$ szög bel- és külszögének felezői. Ha a $B$, $B_2$ pontokon keresztül kört írunk le, melynek középpontja a hiperbola melléktengelyén van, akkor e kör a főtengelyt az $\alpha$ hyperbola gyújtópontjaiban metszi, míg az $A$ pontból a gyújtópontokon keresztül leírt kör az $AB$, $AC$ aszimptotákat egy derékszögű négyszög szögpontjaiban vágja, melynek a főtengelyre merőleges oldalai az $\alpha$ hiperbola csúcsérintői.

Az $\alpha$ hiperbolának ekként meg lévén határozva két csúcsa és gyújtópontja, a $P$ pontból ahhoz körző- és vonalzóval érintő vonható, mely, ha oly helyzetű, hogy metszőpontjai az $AB$, $AC$ aszimptotákkal még az $AB$, $AC$ vonaldarabon vannak, az $ABC$ háromszöget a kívánt módon osztja.

*

A mi annak megítélését illeti, hogy a $P$-nek mily helyzeténél lehet $\alpha$-hoz 0, 1, 2 oly érintőt húzni, a mely a feladat követelményeinek megfelelőleg osztja az $ABC$ háromszöget, a következőkre kell gondolnunk.

A $\alpha$ hiperbolának nemcsak a $BB_2$, hanem a $CC_1$ is érintője, még pedig e vonaldarabok felező pontjában, és $BB$, $CC$, $\alpha$ vonalak egy háromszög alakú idomot $\triangle$-t határolnak. Ha az adott $P$ pont e $\triangle$-ban van, akkor abból 2 érintő húzható, ha ellenben a $BB_2$, $CC_1$ képezte szögek ama két csúcsszögében fekszik, melyben a $\triangle$ nincsen, akkor abból 1 érintő húzható; végre a $P$ pontnak minden más helyzeténél abból 0 érintő húzható $\alpha$-hoz, mely az $ABC$ háromszöget a kívánt módon osztja.

Az $AB$, $AC$ aszimptóták és $BB_1$, $CC_2$ érintők egy $\alpha'$ hiperbolát úgyszintén $BC$, $BA$, $CC_2$, $AA_1$; $BC$, $BA$, $CC_1$, $AA_2$; $CA$, $CB$, $AA_2$, $BB_1$; $CA$, $CB$, $AA_1$, $BB_2$ aszimptoták és érintők $\beta$, $\beta'$, $\gamma$, $\gamma'$ hiperbolákat határoznak meg, melyek mind oly tulajdonságnak, hogy a $P$-ből hozzájok húzott érintők az $ABC$-t a kívánt módon oszthatják. E hiperbolák közül a $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ párok egymást 2 valós, $\beta\gamma'$, $\gamma'\alpha'$, $\alpha\beta'$ egymást 2 képzetes pontban metszik, melyek az $ABC$ háromszög $AA'$, $BB'$, $CC'$ súlyvonalain fekszenek, és azonkívül egymást $BC$, $CA$, $AB$ egyenesek végtelen távol fekvő pontjaiban érintik.

E hat hiperbolának csak azon hat ívét vegyük tekintetbe, melyeknek határoló pontjai az $AA_1$, $AA_2$, $BB_1$, $BB_2$, $CC_1$, $CC_2$ érintők érintőpontjai, - mert csak ezen íveken fekvő pontoknak érintői adnak helyes osztóvonalakat - és jelöljük ezen íveket akképpen, mint az egyes hiperbolákat.

Az $\alpha\beta'\gamma\alpha'\beta\gamma'$ hatoldal $\lambda < 1$ értéknél háromféle lehet, t. i., hogy az $\alpha\beta\gamma$ görbeoldalú háromszög konvex oldalú vagy konkav oldalú, vagy az $ABC$ háromszög súlypontjává fajul el, a szerint a mint

$$\lambda \lesseqgtr \frac{4}{5}.$$

E három esetben az $\alpha\beta\gamma$ görbevonalú háromszög kerületén belül fekvő $P$ pontokra a feladatnak 0, 6, illetve három megoldása van; magán a kerületén fekvő $P$ pontokra 1, 5 illetve 3; annak csúcsaiban fekvő $P$ pontokra 2, 4 illetve 3.

Mind a három esetben az $\alpha'\beta\gamma$, $\beta'\gamma\alpha$, $\gamma'\alpha\beta$ háromszögön belülfekvő pontokra a feladatnak 4 megoldása, ezeknek kerületein fekvő pontokra 3 megoldása, végre bármily más helyzetű $P$ pontra a feladatnak 2 megoldása van.

Ha $\lambda = 1$, akkor az $\alpha$, $\alpha'$, valamint a $\beta$ $\beta'$ és $\gamma$, $\gamma'$ hiperbolák egyesülnek és $\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma'$ hatoldal egy konkávoldalú háromoldallá fajul. E háromoldal kerületén belül fekvő $P$ pontokra a feladatnak 3, a kerületén fekvő pontokra 2, és $P$-nek minden más helyzeténél csak 1 megoldása van.