

Oldassék meg a következő egyenletrendszer:

$$\frac{x+y}{1-xy} = 1 \quad 1)$$

$$\frac{(1-x^2)(1-y^2)+4xy}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{2} \quad 2)$$

A 2) alatti egyenlet még a következő alakban írható:

$$\frac{(1+x-y-xy)(1-x+y-xy)+4xy}{1+x^2+y^2+x^2y^2} = \frac{1}{2}$$

s ennek számlálójába az 1)-ből $1-xy$ értéke behelyettesíthető, mi által a következő alakot nyeri:

$$16xy = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2 \quad 3)$$

Ha most ebbe $x^2 + y^2$ értékét behelyettesítjük az 1)-ből, a következő egyenletet kapjuk:

$$x^2y^2 - 10xy + 1 = 0. \quad 4)$$

Ebből

$$x_1y_1 = 5 + 2\sqrt{6}, \quad x_2y_2 = 5 - 2\sqrt{6} \quad 5)$$

és ezen értékeket az 1)-be helyettesítve

$$x_1 + y_1 = -4 - 2\sqrt{6}, \quad x_2 + y_2 = -4 + 2\sqrt{6}, \quad 6)$$

Az 5) és 6) alatti egyenletekből következik, hogy x_1 és y_1 , illetőleg x_2 és y_2 a következő másodfokú egyenletek gyökei

$$z^2 + (4 - 2\sqrt{6})z + (5 + \sqrt{6}) = 0 \quad 7)$$

$$u^2 + (4 - 2\sqrt{6})u + (5 - \sqrt{6}) = 0 \quad 8)$$

melyekből

$$x_1 = -2 - \sqrt{6} + \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$$

$$y_1 = -2 - \sqrt{6} - \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$$

$$x_2 = -2 + \sqrt{6} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$$

$$y_2 = -2 + \sqrt{6} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$$

J e g y z e t. $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ és $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, mint arról négyzetre-emelés által közvetlenül meggyőződhetünk. Így tehát z és u értékei még a következő alakban is írhatók:

$$z = \pm(\sqrt{2} + \sqrt{3})(1 \mp \sqrt{2}),$$

és

$$u = \pm(\sqrt{2} - \sqrt{3})(1 \mp \sqrt{2}).$$

Szerk.

Prónai Győző, főgymn. VIII.o. tanuló, Besztercebánya.)

A feladatot még megoldották: Grossmann Gusztáv, ág.ev. főgymn. VIII. o. t., Budapest; Heymann Tivadar, főreálisk. VIII. o. t., Győr; Meitner Elemér, V. ker. főreálisk. VIII. B.o.t. Budapest; Weisz Lipót, főreálisk. VI. o. t. Pécs.