

Legyen $AM = x$, $AN = y$. Az MAB , BAN és MAN háromszögekből, melyekben $A = 60^\circ$, következik, hogy:

$$BM^2 = x^2 + a^2 - ax$$

$$BN^2 = y^2 + a^2 - ay$$

$$MN^2 = x^2 + y^2 - xy$$

Mint hogy az MBN derékszög és $MN = l$ lesz az MBN háromszögből

$$BM^2 + BN^2 = MN^2$$

vagy továbbá

$$x^2 + a^2 - ax + y^2 + a^2 - ay = x^2 + y^2 - xy = l^2$$

Az első egyenletből

$$(1) \quad xy = a(x + y) - 2a^2$$

ebből és a másodikból

$$(2) \quad (x + y)^2 - 3a(x + y) + 6a^2 - l^2 = 0$$

Ez utóbbiból $(x + y)$ kiszámítható; legyenek értékei α és β ; ekkor

$$xy = a\alpha - 2a^2, \quad x + y = \alpha$$

$$xy = a\beta - 2a^2, \quad x + y = \beta$$

vagyis x és y a következő egyenletek gyökei:

$$(3) \quad z^2 - \alpha z + a(\alpha - 2a) = 0$$

$$(4) \quad z^2 - \beta z + a(\beta - 2a) = 0$$

A 2) alatti egyenlet gyökei valósak, ha

$$9a^2 - 4(6a^2 - l^2) \geq 0$$

azaz, ha

$$l \geq \frac{a\sqrt{15}}{2}$$

A 3) és 4) alatti egyenletek gyökei a fentebbi feltétel mellett mindig valósak, mert

$$\alpha^2 - 4a(\alpha - 2a) = (\alpha - 2a)^2 + 4a^2$$

és

$$\beta^2 - 4a(\beta - 2a) = (\beta - 2a)^2 + 4a^2$$

mint négyzetek összegei mindig valósak.

Ha $l = 2a$, akkor a 2) alatti egyenlet a következő alakot ölti:

$$(x + y)^2 - 3a(x + y) + 2a^2 = 0$$

és α és β értékei

$$\frac{3 \pm \sqrt{9a^2 - 8a^2}}{2}$$

vagyis

$$\alpha = 2a$$

$$\beta = a$$

miből a 3) és 4) a következő lesz:

$$z^2 - 2az = 0 \quad \text{honnan} \quad x \text{ és } y = 0 \text{ és } 2a$$

$$z^2 - az + a^2 = 0 \quad \text{honnan} \quad x \text{ és } y = \frac{a}{2}(1 \pm \sqrt{5})$$

Az első esetben a keresett MBN sík vagy az ABC vagy az ABD síkjába esik.

A másodikban a nyert $ABMN$ tetraeder térfogata V' úgy aránylik az adott $ABCD$ tetraéder térfogatához V -hez, mint AMN az ABD -hez, mert magasságuk közös; tehát

$$V' : V = -xy : a^2 = a^2 : a^2 = 1$$

vagyis

$$V = V' = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

(*Visnya Aladár, fr. VII. o. t. Pécs.*)