

$$x + y - z = 2a \quad 1)$$

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad 2)$$

$$m(x + y) = xy \quad 3)$$

Mily feltételek mellett lesznek az egyenletrendszer gyökei pozitívek?

Az 1) és 3)-ból a következő új egyenletek folynak

$$x + y = 2a + z \quad 4)$$

$$xy = m(2a + z) \quad 5)$$

vagyis az  $x$  és  $y$  a következő másodfokú egyenlet gyökei

$$u^2 - (2a + z)u + m(2a + z) = 0 \quad 6)$$

melyből

$$u = \frac{1}{2}(2a + z \pm \sqrt{(2a + z)^2 - 4m(2a + z)})$$

de a 2) egyenlet még a következőképpen is írható

$$\begin{aligned} (x + y)^2 - 2xy - z^2 &= 0 \\ (2a + z)^2 - 2m(2a + z) - z^2 &= 0 \\ (4a - 2m)z + 4a^2 - 4ma &= 0 \\ z &= \frac{2a(m - a)}{2a - m} \end{aligned} \quad 7)$$

Ezen értékét  $z$ -nek az  $u$  kifejezésébe helyettesítve, az a következő alakot nyeri

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \left( \frac{2a^2}{2a - m} \pm \sqrt{\frac{2a^2}{2a - m} \left( \frac{2a^2}{2a - m} - 4m \right)} \right) \\ u &= \frac{a^2 \pm 2a^2 \sqrt{a^2 - 4am + 2m^2}}{2a - m} \end{aligned}$$

Hogy  $u$  valós legyen, kell, hogy:

$$2m^2 - 4am + a^2 \geq 0$$

vagy

$$\begin{aligned} 2 \left( \frac{m}{a} \right)^2 - 4 \left( \frac{m}{a} \right) + 1 &\geq 0 \\ 2 \left( \frac{m}{a} - \frac{1}{2}(2 + \sqrt{2}) \right) \left( \frac{m}{a} - \frac{1}{2}(2 - \sqrt{2}) \right) &\geq 0 \end{aligned}$$

a mi akkor áll be, ha

$$\frac{m}{a} \leq \frac{1}{2}(2 - \sqrt{2}) \quad \text{vagy} \quad \frac{m}{a} \geq \frac{1}{2}(2 + \sqrt{2}) \quad 8)$$

Hogy  $u$  mindkét értéke pozitív legyen, kell, hogy összegük és szorzatuk egyidőben pozitív legyen, vagyis a 6)-ból

$$2a + z > 0 \quad \text{és} \quad m(2a + z) > 0$$

$$\frac{2a^2}{2a - m} > 0 \quad \text{és} \quad \frac{2a^2 m}{2a - m} > 0$$

mely feltételek akkor vannak kielégítve, ha

$$2a - m > 0, \quad m > 0, \quad a > 0$$

azaz

$$0 < m < 2a.$$

De minthogy ugyanakkor, hogy  $z$  is pozitív legyen, a 7)-ből

$$a < m < 2a$$

a 8) alatti egyenlőtlenségekből csak a második lehet kielégítve, vagyis a végleges feltétel:

$$\frac{a}{2}(2 + \sqrt{2}) \leq m \leq 2a, \quad a > 0.$$