

Az OMN háromszög súlypontját nyerem, ha az N és M pontokat összekötöm az OM és ON egyenesek felezési pontjaival N' és M' -tel. Az NN' és MM' egyenesek metszéspontja G a keresett súlypont. Fel kell tehát írnom ezen utóbbi egyenesek egyenleteit. E végből ismernem kell az N' és M' pontok koordinátáit. De ezek a következők:

$$N'\left(\frac{0+10}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = N'(5, 0),$$

$$M'\left(\frac{0+6}{2}, \frac{0+8}{2}\right) = M'(3, 4).$$

Ennélfogva az NN' és MM' egyenesek egyenletei:

$$\begin{aligned} NN' \dots y - 0 &= \frac{0-8}{5-6}(x-5) \\ y &= 8(x-5) \\ y - 8x + 40 &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} MM' \dots y - 0 &= \frac{0-4}{10-3}(x-10) \\ 7y &= -4x + 40 \\ 7y + 4x - 40 &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Az 1) és 2) egyenletekből kiszámíthatók a G pont koordinátáinak mérőszámai.

$$G\left(\frac{16}{3}, \frac{8}{3}\right).$$

A három magasságvonal átmenési pontját H -t megkapom, ha az N és M pontokból a szemben fekvő egyenesekre merőlegeseket húzunk és e merőlegesek metszéspontját felkeressük. Az OM és ON egyenesek egyenletei azonban a következők:

$$OM \dots y = 0,$$

$$ON \dots 6y - 8x = 0$$

Tehát a reájuk merőleges NN'' és MM'' egyenesek egyenletei:

$$NN'' \dots x = 6$$

$$MM'' \dots 8y + 6x - 60 = 0$$

és így a H pont koordinátái: $H(6, 3)$.

Végre a háromszög körül írható kör középpontját C -t megkapom, ha az N' és M' pontokban az OM és ON egyenesekre merőlegeseket emelek és ez egyenesek metszéspontjait felkeresem. De az $N'C$ és $M'C$ egyenesek egyenletei a következők:

$$NC \dots x = 5$$

$$MC \dots 8y + 6x - 50 = 0$$

és így a C pont koordinátái:

$$C\left(5, \frac{5}{2}\right)$$

Ha három pont koordinátáit általánosságban x_k és y_k -val jeleljük, hol $k = 1, 2, 3$ -mal, annak feltételét, hogy a három pont egy egyenesben fekszik, a következő egyenlet fejezi ki:

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$$

Tehát a jelen esetben:

$$\frac{16}{3}\left(3 - \frac{5}{2}\right) + 6\left(\frac{5}{2} - \frac{8}{3}\right) = 0$$

$$16 + 15 + \frac{40}{3} - 16 - 15 = 0$$

Ez utóbbi egyenlet szemmel láthatólag identitás.

Hogy végre $CH = 3CG$ -vel azt közvetlenül bebizonyíthatom, ha felírom CH és CG értékeit a C, G és H pontok koordinátáinak segítségével; ekkor ugyanis:

$$CH^2 = (5-6)^2 + \left(\frac{5}{2}-3\right)^2 = \frac{5}{4}$$

és

$$CG^2 = \left(5 - \frac{16}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - \frac{8^2}{3}\right) = \frac{1}{9} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$$

Tehát

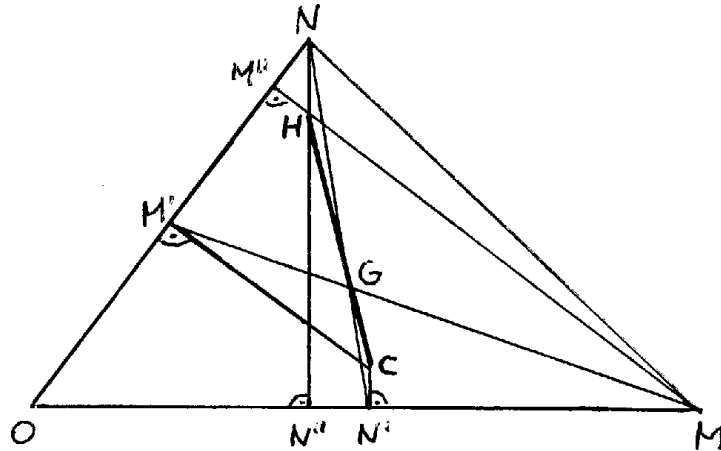
$$CH^2 = 9CG^2,$$

és

$$CH = 3CG.$$

A mi bebizonyítandó volt.

(Jorga Gergely, főreálisk. VIII. oszt. tanuló, Arad)



10. ábra

Jegyzet. Hogy a CGH pontok egy egyenesben fekszenek és a $CH = 3CG$ -vel, az a 10. ábrából a planimetria tételeivel is egyszerűen kimutatható.

Kösszük össze az M' és N' pontokat egy egyenessel. A $GN'M'$ és $HN M$ háromszögek hasonlóságából következik, hogy:

$$\frac{CN'}{NH} = \frac{N'M'}{MN} = \frac{1}{2} \quad 1)$$

Nevezzük a CH és NN' egyenesek metszéspontját G' -nek, akkor a $CG'H$ és $HG'N$ háromszögek hasonlóságából következik, hogy:

$$\frac{CG'}{HG'} = \frac{N'G'}{NG'} = \frac{CN'}{HN} = \frac{1}{2} \quad 2)$$

De a háromszög súlypontja G az NN' és MM' egyenesek metszéspontja és a $GN'M'$ és GNM háromszögek hasonlóságából következik, hogy

$$\frac{N'G}{NG} = \frac{M'G}{MG} = \frac{N'M'}{NM} = \frac{1}{2} \quad 3)$$

A 2) és 3) egyenlet összehasonlításából folyik, hogy

$$\frac{N'G'}{NG'} = \frac{N'G}{NG},$$

azaz a G' és G pontok azonosak, vagyis a CGH pontok egy egyenesben fekszenek; továbbá a 2)-ből $2CG = HG$, $3CG = HG + CG = CH$, vagyis a CH a CG háromszorosa.