

Keressék az

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 4x + 3} \quad \text{és} \quad y = \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 + 2x + 1}$$

függvények maximuma és minimuma.

Első megoldás.

Írjuk az első egyenletet x -nek fogyó hatványai szerint rendezett alakjában:

$$(1 - y)x^2 - 4yx + (1 - 3y) = 0$$

Ezen egyenlet gyökei akkor valósak, ha

$$y^2 - 4y - 1 \geq 0$$

vagyis ha

$$[y - (2 + \sqrt{5})][y - (2 - \sqrt{5})] \geq 0$$

Ez akkor következik be, ha

$$y \geq (2 + \sqrt{5}) \geq (2 - \sqrt{5})$$

vagy ha

$$y \leq (2 - \sqrt{5}) \leq (2 + \sqrt{5})$$

Az y megengedhető értékeinek sorozataiban $y' = 2 - \sqrt{5}$ felső határ, azaz maximum és $y'' = 2 + \sqrt{5}$ alsó határ, vagyis minimum

Második megoldás.

Legyen x_1 és x_2 az x -nek két értéke, melynél y ugyanazon értékeket veszi fel; vagyis a második függvény esetére

$$\frac{x_1^2 - 2x_1 + 1}{2x_1^2 + 2x_1 + 1} = \frac{x_2^2 - 2x_2 + 1}{2x_2^2 + 2x_2 + 1}$$

$$\begin{aligned} & 2x_1^2x_2^2 + 2x_1^2x_2 + x_1^2 - 4x_1x_2^2 - 4x_1x_2 - 2x_1 + 2x_2^2 + 2x_2 + 1 = \\ & = 2x_2^2x_1^2 + 2x_2^2x_1 + x_2^2 - 4x_2x_1^2 - 4x_2x_1 - 2x_2 + 2x_1^2 + 2x_1 + 1; \\ & 2x_1x_2(x_1 - x_2) + (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) - 2(x_1 - x_2) + 4x_1x_2(x_1 - x_2) - \\ & - 2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) - 2(x_1 - x_2) = 0 \\ & 6x_1x_2 - (x_1 + x_2) - 4 = 0 \end{aligned}$$

Ha most

$$x_1 = x_2 = x,$$

akkor

$$6x^2 - 2x - 4 = 0$$

miből

$$x = \begin{cases} = 1 \\ = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

y -nak megfelelő értékei

$$y_{min} = 0$$

$$y_{max} = 5$$

(Visnya Aladár, fr. VII. o. t. Pécs.)