

Az  $ABC$  háromszög  $A$  és  $B$  csúcaiban az  $AC$  és  $BC$  oldalokat érintő körök középpontjai az  $Ay$  és  $Bz$  merőlegesekben vannak.

Legyenek az  $O$  és  $O_1$  középpontú körök a kívánt tulajdonságúak; tehát, hogy a  $B$ , ill.  $A$  pontokban a háromszög oldalait és  $E$ -ben egymást is érintik. Ekkor

$$OB : O_1A = r : r_1 = m : n$$

hol  $m$  és  $n$  két adott távolság mértékszámait. A figyelembe vett két körnél  $OO_1 = r + r_1$ .

Húzzuk meg  $AE$  egyenest, mely az  $O$  középpontú kört  $S$ -ben metszi. Az  $OSE$  háromszög hasonló az  $O_1AE$  háromszöghöz, s így tehát

$$OS : O_1A = SE : AE = m : n$$

Ha  $c$  oldalt  $m : n$  arány szerint osztjuk belül és kívül az osztó pontok  $D$  és  $D'$ , akkor feltétel szerint

$$DA : DB = EA : ES = n : m$$

azaz  $DE$  egyenes párhuzamos  $BS$ -sel.

De  $BS$  parallel a  $C$  szöget felező átszelővel, mert  $BOS = C$  és  $SBO = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - SBx$ , tehát  $SBx = \frac{C}{2}$ .

A  $D$  pontból a  $C$  szöget felező átszelővel párhuzamosan húzott egyenes e szerint átmegy a körök érintkezéspontján.

Az  $E$  pont meghatározására ez adatokhoz vegyük még figyelembe, hogy ez egyszersmind az  $AEB$  háromszög csúcsa, mely háromszögből ismeretes az alap és az  $E$ -nél levő szög, mely  $\pi - \frac{C}{2}$ ; mert

$$SEB = \frac{1}{2}SOB = \frac{C}{2}$$

Ámde ezáltal adva van az  $AEB$  háromszög köré írható kör sugara  $r'' = c \mid 2 \sin \frac{C}{2}$ , mely az  $ABC$  köré írt kör sugarával ( $r_0$ ) igen egyszerű összefüggésben van. Ugyanis:

$$r_0 = \frac{c}{2 \sin C} = \frac{c}{4 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}$$

és így

$$r' = 2r_0 \cos \frac{C}{2}$$

Ha tehát a körülírt kör középpontján ( $G$ ) a  $c$  oldalra merőleges  $C_1C_2$  átmérőt rajzolunk és  $C_1$  pontot  $A$  vagy  $B$ -vel összekötjük

$$C_1B = C_1A = r'$$

$$C_2C_1B = C_2C_1A = \frac{C}{2}$$

lévén.

Az  $r'$  sugarú kör, melynek középpontja  $C_1$  a  $C$  szöget felező egyenessel  $D$ -ből párhuzamosan húzott egyenest  $E$  és  $E_3$  pontokban vágja, mint a kívánt tulajdonsággal bíró két-két kör érintéspontjaiban.

E két pár kör mindig valós, mert  $D$  pont az  $r'$  sugarú kör területén belül van, s így minden rajta átmenő egyenes a kört két valós és pedig külön vált pontban metszi.

A  $D$  harmonikus párjából  $D$ -ből vont,  $DE$ -vel párhuzamos szelőnek az  $r'$  sugarú körel való metszései szintén két-két, a kívánt tulajdonságokkal bíró kört adnak általában, de az  $E_1$  és  $E_2$  metszéspontok egy kettős ponttá egyesülhetnek, vagy képzetesek is lehetnek,  $D'$  az  $r'$  sugarú kör kerületén kívül lévén, s így e körök két párja egy párrá, vagy mindkét pár lehetetlenné is válhatik.

## II.

Legyen a szerkesztendő körökre az a feltétel, hogy:

$$r : r_1 = m : n \text{ és } r - r_1 = O'O'_1$$

$S'O'E'_1$  háromszög hasonló  $AO'_1E'_1$  háromszöghöz, hol  $E'_1$  az érintkezéspont és  $S'$  az  $AE'_1$  metszéspontja az  $O'$  középpontú körrel.

$$\begin{aligned} E'_1O' : E'_1O'_1 &= E'_1S' : E'_1A = r : r_1 \\ &= m : n = D'B : D'A \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Lásd jelen folyóirat első évfolyamában az 54. oldalt.

$SB$  hűrt és  $D'E'_1$  szelűt húzván, ezek az elűbbi aránylat szerint parallelák.

Ámde  $S'B \perp BS$ -re, tehát a  $C$  szűget felezű irányra, mert  $MBS'$  szűg  $= \frac{\pi}{2}$  (hol  $M$  az  $O'S'$  egyenes másik metszés-pontja az  $O'$  kűzűppontű kűrrel) mint félkűrbe esű kerűleti szűg és így  $D'E'_1$  is merűleges  $BS$ -re.

$E'_1$  pont meghatározására vegyűk figyelembe, hogy  $E'_1$  az  $AE'_1A$  hűromszűg csűcsa, mely hűromszűgnek  $c$  oldala és  $E'_1$ -nél lűvű szűge ismeretes.

Ugyanis:

$$BE'_1S' = \frac{1}{2}S'O'B = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$$

Az  $AE'_1B$  hűromszűg kűrű írt kűr sugara tehát

$$r'' = \frac{c}{2 \cos \frac{C}{2}}$$

és ha

$$r_0 = \frac{c}{4 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}$$

az  $ABC$  hűromszűg kűrű írt kűr sugara, akkor

$$r' = 2r_0 \sin \frac{C}{2}$$

Ha ezek szerint az  $ABC$  hűromszűg kűrű írt kűrnek  $c$  oldalra merűleges átműrűjűt szerkesztjűk ( $C_1C_2$ ) és  $C_2$  pontot  $A$  vgy  $B$ -vel összekűtjűk, úgy:

$$C_2A = C_2B = r''$$

Az  $r''$  sugarű kűrnek  $D'E'_1$ -tel való metszés-pontjai oly két-kű kűr érintkezés pontjai, melyek a kívánt tulajdonságokkal bírnak.

$D'$  pont kívűl lévűn a kűrűn  $E'_1$  és  $E'_2$  pontok egy kettűs ponttű egyesűlhetnek, esetleg képzetesek lehetnek, azaz: az  $E'_1$  illetűleg  $E'_2$  pontban érintkező kűrűk egy párrű egyesűlhetnek, vagy lehetetlenekkű válnak.

$D'$  harmonikus párjából  $D$ -bűl vont,  $D'E'_1$ -tel parallel szelű az  $r''$  sugarű kűrt mindig két valűs és kűlűnvált pontban ( $E'$  és  $E'_3$ ) vágja s e pontok szintűn két-kű, a kívánt fűltűteleknek megfelelű kűr érintkezés-pontjai lesznek. Ez utűbbi kűrűk mindig valűsak, mert  $D$  az  $r''$  sugarű kűrűn belűl van.

A feladatnak a kifejtettek szerint általában nyolcz megoldása van, melyek kűzűl négy mindig valűs. E minden kűrűlműnyek kűzt valűs kűrűk párjai kívűlrűl érintkeznek.

A szerkesztűs tehát oda reducálűdik, meglűvűn határozva egy-egy pár kűr érintkezés pontja, hogy oly kűrűket szerkesztűnk, melyek adott ponton átműnvűn, adott egyenest adott pontban érintenek. A kűzűppontot egyszerűen találjuk  $Ay$ , illetűleg  $Bz$  egyenes és az illetű segűdkűrnek azon átműrűje metszésűben, mely az  $Ek$  meg az  $a$ , illetűleg  $B$  pontokat összekűtű kűzűs hűrra merűlegesen áll.

(Szerk.)