

Mindenekelőtt számítsuk ki az alaplap területét.

Ezt úgy eszközölhetjük, hogy azt 5 egybevágó egyenlőszárú háromszögre bontjuk s egy ily háromszög területét 5-ször vesszük.

Egy ily háromszög területe

$$S = \frac{ar'}{2},$$

hol a az ötszög oldalát, r' az ötszögbe írt kör sugarát jelenti.

De

$$r'^2 = r^2 - \frac{a^2}{4},$$

hol r az ötszög körül írt kör sugarát jelenti.

a -nak értéke azonban

$$a = \frac{r}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

és

$$\frac{a^2}{4} = \frac{r^2}{16} (10 - 2\sqrt{5})$$

tehát

$$\begin{aligned} r'^2 &= \frac{r^2}{16} 16 - \frac{r^2}{16} (10 - 2\sqrt{5}), \\ &= \frac{r^2}{16} (6 + 2\sqrt{5}), \\ &= \frac{r^2}{16} (1 + \sqrt{5})^2, \end{aligned}$$

s így

$$r' = \frac{r}{4} (1 + \sqrt{5}).$$

Ebből

$$S = \frac{r^2}{16} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} (1 + \sqrt{5}).$$

Az oldallap területe:

$$\begin{aligned} S' &= \frac{a^2}{4} \sqrt{3}, \\ &= \frac{r^2}{16} (10 - 2\sqrt{5}) \sqrt{3}. \end{aligned}$$

A teljes felület tehát

$$\begin{aligned} 5(S + S') &= 5 \left\{ \frac{r^2}{16} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} (1 + \sqrt{5}) + \frac{r^2}{16} (10 - 2\sqrt{5}) \sqrt{3} \right\} = \\ &= \frac{5}{16} r^2 \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \left\{ 1 + \sqrt{5} + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}} \right\} \\ &= \frac{45}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \left\{ 1 + \sqrt{5} + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}} \right\} \text{ dm}^2 \end{aligned}$$

A köbtartalmat kapom, ha az alap területét a magasság harmadrészével megszorozom. De a magasság h oly derékszögű háromszög befogója, melynek átfogója a és másik befogója r ; vagyis h nem egyéb, mint az r sugarú körbe írt tízszög oldala.

Tehát

$$h = \frac{r}{2} (\sqrt{5} - 1).$$

A keresett térfogat:

$$\begin{aligned} V &= \frac{r}{6} (\sqrt{5} - 1) 5 \frac{r^2}{16} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} (\sqrt{5} + 1) \\ &= \frac{5}{96} r^3 4 \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \\ &= \frac{5}{24} r^3 \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \\ &= \frac{5}{24} 216 \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \text{ dm}^3 \\ V &= 45 \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \text{ dm}^3 \end{aligned}$$

(Jorga Gergely, főreálisk. VIII. oszt. tanuló, Arad).