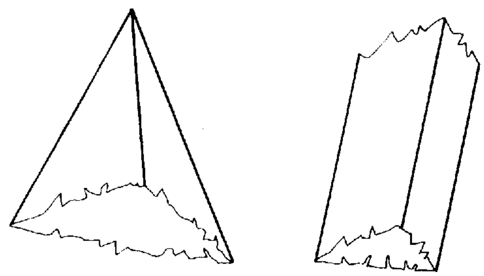
2. *Egy konvex testnek két háromszöglapja és három négyszöglapja van. Kössük össze az egyik háromszöglap mindegyik csúcsát a vele szemközti négyszöglap átlóinak metszéspontjával. Bizonyítsuk be, hogy a három egyenes egy ponton megy át.*

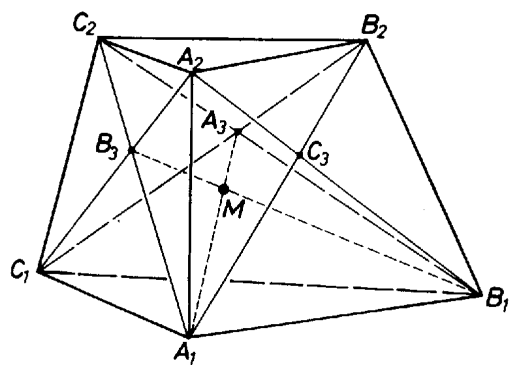
Megoldás. Meg kell határoznunk a test alakját. Egy négyszöglap éleihez csatlakozik mind a négy további lap. Mivel a test konvex, így a testet a négyszöglapok síkjai által határolt egyik konvex térrészből a háromszöglapok síkjai metszik ki.



1. ábra

Ez a térrész egy triéder (háromoldalú testszöglet, amelyiknek a lapszögei 180°-nál kisebbek), vagy végtelen, háromoldalú hasáb *(1.ábra)*. Ennek a határlapjain a további két metsző sík között négyszögeknek kell keletkezniük, tehát a két sík metszésvonalának a térrészen kívül kell lennie, vagy párhuzamos a két sík. A háromszöglapoknak tehát nincs közös pontja.

Legyenek ezek a lapok $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$, a további élek pedig A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 *(2. ábra)*. Jelöljük a $B_1B_2C_2C_1$, $C_1C_2A_2A_1$, $A_1A_2B_2B_1$ lapok átlóinak a metszéspontját rendre A_3, B_3, C_3-mal, és nézzük az A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 egyeneseket.



2. ábra

Az $A_1B_1C_2$ síkmetszet B_1C_2 oldalának belső pontja A_3, A_1C_2-nek pedig B_3, így A_1A_3 és B_1B_3 metszi egymást a háromszög belsejének egy M pontjában. Hasonlóan látható, hogy C_1C_3 is metszi A_1A_3-at is, B_1B_3-at is.

Az $A_1B_1C_2$ síknak egyik oldalára esik C_1, a másikra A_2 és B_2, tehát C_1 és C_3 is ellenkező oldalára esik. C_1C_3-nak tehát egy közös pontja van a síkkal, és így csak akkor metszheti A_1A_3-at is, B_1B_3-at is, ha ez a pont M. A három egyenes tehát egy ponton megy keresztül, és ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzések: 1. A megoldást többen arra a tételre hivatkozva fejezték be, hogy ha három egyenes páronként metszi egymást, akkor vagy egy síkban vannak, vagy egy ponton mennek keresztül. Ez igaz három helyett akárhány egyenesre, és így látható be. Ha egy ponton mennek át az egyenesek, akkor igaz az állítás. Ha ez nem áll, akkor vegyünk egy P metszéspontot. Egy e egyenes, amelyik nem megy át P-n, a P-n átmenő egyeneseket (tehát legalább két egyenest) P-től különböző pontban metsz. Ekkor azonban a P-n átmenő egyenesek benne vannak a P és e által meghatározott síkban. Ebben a síkban minden további egyenes is benne van, hiszen különböző pontokban metsz legalább két P-n átmenő egyenest.

2. A feladat megoldásában valójában három metsző síkról van szó, az $A_1B_1C_2$ háromszögén kívül az $A_1B_2C_1$ és az $A_2B_1C_1$ háromszög síkjáról. A fenti megoldás egy változatához jutunk, ha azt látjuk be, hogy A_1A_3, B_1B_3 és C_1C_3 ezek közül rendre két-két sík metszésvonala, és ezek nem lehetnek párhuzamosak.

3. Bár a megoldás során ismételten hivatkoztunk a test konvex voltára, ez többnyire csak bizonyos metszéspontok létrejöttének a biztosításához kellett. Felmerül a kérdés, hogy ez nem biztosítható-e egyszerűbb feltételekkel is. Ennek végiggondolását az olvasóra hagyjuk.

4. A feladat megfogalmazható síkbeli feladatként, csak azt kell figyelembe venni, hogy a test alakját vizsgálva arra jutottunk, hogy A_1A_2, B_1B_2 és C_1C_2 egy ponton megy keresztül, vagy párhuzamosak. A feladat tehát így szól:

Az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 egyenesek egy ponton mennek keresztül, vagy párhuzamosak. A_1B_2 és B_1A_2, B_1C_2 és C_1B_2, C_1A_2 és A_1C_2 metszéspontját sorra C_3, A_3, B_3-mal jelölve bizonyítandó, hogy A_1A_3, B_1B_3 és C_1C_3 egy ponton megy keresztül, vagy párhuzamosak. (Feltesszük, hogy A_3, B_3 és C_3 létrejön.) Bizonyításra kényelmes út az ábrát egy térbeli alakzat vetületeként felfogni. Egy síkban maradó bizonyítás igen nehéznek látszik.