

I. megoldás. A nevező pozitív, mert a feladat feltételei mellett $b + c > 1$, és így

$$(b + c)^n \geq b + c > c.$$

Elegendő ennek folytán a nevezővel átszorozva keletkező

$$(1) \quad (ab + c)^n - c \leq a^n(b + c)^n - a^n c$$

egyenlőtlenséget bizonyítani. Ezt teljes indukcióval tesszük. Az $n = 1$ esetben egyenlőség áll fenn.

Jelöljük a bal oldalt A_n -nel, a jobb oldalt B_n -nel. Tegyük fel, hogy n -nek valamilyen m értékére $A_m \leq B_m$, és nézzük meg, mennyivel változik az egyik oldal, mennyivel a másik, ha m -et eggyel növeljük.

$$\begin{aligned} A_{m+1} - A_m &= (ab + c)^m(ab + c - 1). \\ B_{m+1} - B_m &= a^m(b + c)^m(ab + ac - 1) - a^m(a - 1)c. \end{aligned}$$

Az $ab + ac - 1$ különbségről a könnyebb összehasonlítás érdekében $ab + c - 1$ -re térve, majd az első tag első és második tényezőjét egy hatvánnyá alakítva az utóbbi különbség így írható:

$$\begin{aligned} B_{m+1} - B_m &= a^m(b + c)^m(ab + c - 1) + a^m(b + c)^m(ac - c) - a^m(a - 1)c = \\ &= (ab + ac)^m(ab + c - 1) + a^m(a - 1)c[(b + c)^m - 1]. \end{aligned}$$

Itt az első tag nagyobb az $A_{m+1} - A_m$ különbségnél, ha $a > 1$, mert $ab + ac > ab + c$, a második pedig pozitív. Így

$$B_{m+1} - B_m > A_{m+1} - A_m, \text{ azaz } B_{m+1} - A_{m+1} > B_m - A_m.$$

Indukciós feltevésünk szerint a jobb oldal nem negatív, így a bal pozitív. Ezzel azt láttuk be, hogy ha (1) teljesül egy n értékre, és $a > 1$, akkor minden nagyobb értékre már szigorú egyenlőtlenség érvényes (1)-ben.

Mivel $n = 1$ -re egyenlőség áll (az eredeti egyenlőtlenségben minden a, c és 0-tól különböző b értékre), így (1)-ben és az eredeti egyenlőtlenségben is $a < 1$ jel érvényes minden 1-nél nagyobb n egészre és 1-nél nagyobb a -ra.

Ha $a = 1$, akkor egyenlőtlenségeink egyenlőségbe mennek át. Ezzel a feladat állítását igazoltuk, és tisztáztuk azt is, hogy milyen esetekben áll fenn egyenlőség.

II. megoldás. Feltehetjük, hogy $n > 1$ és $a > 1$, mert $n = 1$ esetén a két oldal egyenlő, bármi is a , és hasonlóan egyenlőség áll fenn $a = 1$ esetén minden n -re.

Az (1) egyenlőtlenséget bizonyítjuk. Rendezzük át a következő módon:

$$(2) \quad c(a^n - 1) \leq [a(b + c)]^n - (ab + c)^n.$$

Alkalmazzuk mindkét oldalra az $n \geq 2$ esetén érvényes

$$u_n - v_n = (u - v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \dots + uv^{n-2} + v^{n-1})$$

azonosságot. A jobb oldalon az alapok különbsége $c(a - 1)$, így a bizonyítandó állítás a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} c(a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1) &\leq c(a - 1)[(a^{n-1}(b + c)^{n-1} + \\ &+ a^{n-2}(b + c)^{n-2}(ab + c) + \dots + a(b + c)(ab + c)^{n-2} + (ab + c)^{n-1}]. \end{aligned}$$

Itt a vizsgált esetben $c(a - 1)$ pozitív, a zárójel j -edik tagjában pedig a^j a bal oldalon 1-gyel van szorozva, a jobb oldalon viszont

$$ab + c > b + c > 1$$

folytán 1-nél nagyobb számmal. Az utolsó egyenlőtlenség tehát a vizsgált esetekben szigorú egyenlőtlenséggel helyes.

Csupa ekvivalens átalakítást végeztünk, tehát a bizonyítandó egyenlőtlenség is szigorú egyenlőtlenséggel érvényes, kivéve, ha $n = 1$, továbbá ha $a = 1$. Ezzel az előző megoldásban is nyert, valamivel élesített állítást nyertük.

Megjegyzések: 1. Figyeljük meg, hogy mind a nevező pozitív voltának a belátásánál, mind az (1) egyenlőtlenség bizonyításánál csak annyit használtunk, hogy $b + c \geq 1$, $b > 0$, így elég lett volna csak ennyit tenni fel $b \geq 1$ helyett.

2. A (2) egyenlőtlenséget beláthatjuk úgy is, hogy a jobb oldalt a binomiális tétel szerint kifejtjük és a b egyenlő hatványait tartalmazó tagokat összevonjuk. Ekkor a legmagasabbfokú tag kiesik, a következő

$$na^{n-1}b^{n-1}(a - 1)c,$$

a többiben pozitív tényezők $a^k - 1$ -gyel vannak szorozva ($k = 2, \dots, n$), ami pozitív.

A bal oldalt a fenti módon alakítva szorzattá $(a - 1)c$ szorzója egy n -tagú összeg, aminek a tagjai a -nak n -nél kisebb kitevőjű hatványai, és így nem nagyobbak a^{n-1} -nél, tehát $a^{n-1}b^{n-1}$ -nél sem. Az egyenlőtlenség tehát teljesül.

III. megoldás. A feladat annak a belátását kívánja, hogy a

$$P(x) = x^n - \frac{(bx + c)^n - c}{(b + c)^n - c}$$

polinom olyan függvényt állít elő, amelyik nemnegatív, ha x értéke legalább 1.

Ha $n = 1$, akkor a 0 polinommal van dolgunk, hacsak $b \neq 0$.

Ha $n \geq 2$, akkor $P(1) = 0$. Így az állítás bizonyításához elég azt megmutatni, hogy a függvény növekszik, $x \geq 1$, ehhez pedig azt, hogy a deriváltja pozitív ezekre az értékekre. A derivált

$$P'(x) = n \left(x^{n-1} - \frac{b(bx + c)^{n-1}}{(b + c)^n - c} \right) = \frac{n(x^{n-1}(b + c)^n - cx^{n-1} - b(bx + c)^{n-1})}{(b + c)^n - c}.$$

A nevezőre a binomiális tételt alkalmazva

$$\begin{aligned} (b + c)^n - c &= b^n + nb^{n-1}c + \dots + c^n - c > b^n + nb^{n-1}c - c = \\ &= b^n + (nb^{n-1} - 1)c > b^n > 0. \end{aligned}$$

A számlálót így írhatjuk:

$$n \left(b \left[(bx + cx)^{n-1} - (bx + c)^{n-1} \right] + cx^{n-1} \left[(b + c)^{n-1} - 1 \right] \right).$$

Itt, mivel $n \geq 2$, $x \geq 1$ és $b + c > 1$,

$$bx + cx \geq bx + c \geq b + c > 1,$$

tehát az első különbség nemnegatív, a második pozitív, és így a számláló is pozitív, tehát P' is, és ezt akartuk belátni.