

I. megoldás: Az alapgondolat az, hogy egy G gyereket különválasztva, az azonos számú fejet tartalmazó kimenetekből annyit, amennyit lehet, egyenletesen szétosztunk a többi gyerek közt, majd a fennmaradó sorozatokat G -nek adjuk. Ezután elég p -t úgy választani meg, hogy G nyerési esélye $1/100$ legyen, mivel a többi között egyenletesen oszlik meg a maradó $99/100$ valószínűség. Azt kell bizonyítani, hogy alkalmas k esetén ez lehetséges.

Száz gyerek esetén ez kiegészíthető azzal a gondolattal, hogy elég a feladatot száz helyett tízre megoldani. Ha ugyanis tíz gyerek esetén van alkalmas p , k és a kimenetek egy alkalmas szétosztása, akkor a száz gyereket tízes csoportokba osztjuk, és először egy csoportot sorsolunk ki módszerünkkel, majd a csoport tagjai közt sorsoljuk ki az ajándékot.

Jegyezzük meg, hogy ha valaki a „fej”-et tekintené „írás”-nak, természetesen akkor is megfelelő maradna az érme, ami azt jelenti, hogy egy p értékkel együtt $1 - p$ is megoldása a feladatnak. Ez azt sugallja, hogy kényelmesebb p -t $\frac{1}{2} - r$ alakban keresni; így $1 - p = \frac{1}{2} + r$.

Próbálkozzunk kilenc dobással. Ekkor a $0, 1, \dots, 9$ fejet tartalmazó dobássorozatok száma sorra $1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1$. Ezekből az első 9 gyerek közt szétosztva amennyit lehet, csak a 0 , a 3 , a 6 és a 9 fejet tartalmazó sorozatokból marad a tizedik gyereknek rendre $1, 3, 3, 1$. Egy-egy ilyen dobássorozat rendre $\left(\frac{1}{2} + r\right)^9$,

$\left(\frac{1}{2} + r\right)^6 \left(\frac{1}{2} - r\right)^3$, $\left(\frac{1}{2} + r\right)^3 \left(\frac{1}{2} - r\right)^6$, $\left(\frac{1}{2} - r\right)^9$ valószínűséggel következik be. Így a következő egyenletet kapjuk:

$$\left(\frac{1}{2} - r\right)^9 + 3 \left(\frac{1}{2} - r\right)^6 \left(\frac{1}{2} + r\right)^3 + 3 \left(\frac{1}{2} - r\right)^3 \left(\frac{1}{2} + r\right)^6 + \left(\frac{1}{2} + r\right)^9 = \frac{1}{10}.$$

A bal oldalon

$$\left(\frac{1}{2} - r\right)^3 + \left(\frac{1}{2} + r\right)^3 = \frac{1}{4} + 3r^2$$

köbe áll, így az egyenlet pozitív gyökét keresve azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{4} + 3r^2 = \frac{1}{\sqrt[3]{10}}, \quad r = \sqrt{(4 - \sqrt[3]{10})/12\sqrt[3]{10}}.$$

Innen – 6 értékes tizedesjeggyel számolva – azt kapjuk, hogy a feladat 10 gyerek esetén $k = 9$, $p = 0,232818$ választással megoldható.

Megjegyzések: 1. Az első kilenc gyerek egyenként 56 kimenetel esetén nyer, a tizedik összesen 8 esetben, az ezek valamelyike bekövetkezésének a valószínűsége lesz mindegyikük számára egyenlő.

2. A feladat száz gyerek esetén kérdezi az alkalmas dobásszámot és valószínűséget. Erre úgy felelhetünk, hogy mindegyik tízes csoportban előre kiosztjuk azokat a kimeneteket is, amelyekkel a második fordulóban nyerne, amennyiben az első fordulóban az ő csoportjuk jut tovább. Az egyes gyerekek nyerő kimenetelsorozatai most már úgy adódnak, hogy az első sorozat minden kimeneteléhez hozzáírjuk a második fordulóban rájuk kedvező kimenetek mindegyikét. Így száz gyerek esetére p változatlan, $k = 18$, és lesz, akire $56 \cdot 56 = 3136$ kimenetel jut, lesz akire $8 \cdot 56 = 448$, egy gyerekre pedig mindössze $8 \cdot 8 = 64$.

II. megoldás: Megmutatjuk, hogy a feladat 100 helyett tetszés szerinti n -re megoldható a fenti módszerrel. Hagyjuk k értékét egyelőre határozatlanul. A j fejet tartalmazó sorozatokból az első $n - 1$ gyerek mindegyikének ugyanannyit adva, jelöljük c_j -vel az n -edik gyereknek maradó sorozatok számát. Nyilván $c_0 = c_k = 1$. A többi indexre $0 \leq c_j \leq n - 2$. Mivel egy ilyen sorozat bekövetkezésének a valószínűsége $p^j(1 - p)^{k-j}$, így a következő egyenletre jutunk:

$$p^k + \sum_{j=1}^{k-1} c_j p^j (1 - p)^{k-j} + (1 - p)^k = \frac{1}{n}.$$

Belátjuk, hogy ha k elég nagy, akkor az egyenletnek van 0 és 1 közé eső megoldása. A bal oldal p -nek az egész számegyenesen értelmezett és folytonos $f(p)$ függvényét állítja elő, így elég belátni, hogy van olyan hely, ahol $1/n$ -nél nagyobb értéket vesz fel, és olyan is, ahol kisebbet, mert folytonos függvény a két hely között felvesz a két érték közötti minden értéket.

$$f(1) = 1 > \frac{1}{n}.$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(2 + \sum_{j=1}^{k-1} c_j\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k [2 + (k-1)(n-2)] \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k (k-1)(n-1),$$

ha k legalább 3 . Létezik tehát k -hoz megfelelő p , ha az utolsó kifejezés nem nagyobb, mint $1/n$, azaz

$$n(n-1) \leq \frac{2^k}{k-1}.$$

A jobb oldali kifejezés k növekedtével minden határon túl nő, tehát minden n -hez választható alkalmas k és p érték.

$$n = 100 \quad \text{esetén} \quad 2^{18}/17 = 262\,144/17 > 15\,420 > 9900,$$

tehát választható p úgy, hogy 18 dobásból álló sorozattal igazságosan ki lehessen sorsolni az ajándékot.

Megjegyzés. Csak véletlen egyezés, hogy az I. megoldás szerint is 18 feldobással történhet a sorsolás. A II. megoldásnál a c_j együtthatók kiszámításával belátható, hogy már 16 dobásból álló sorozathoz is van alkalmas p érték.