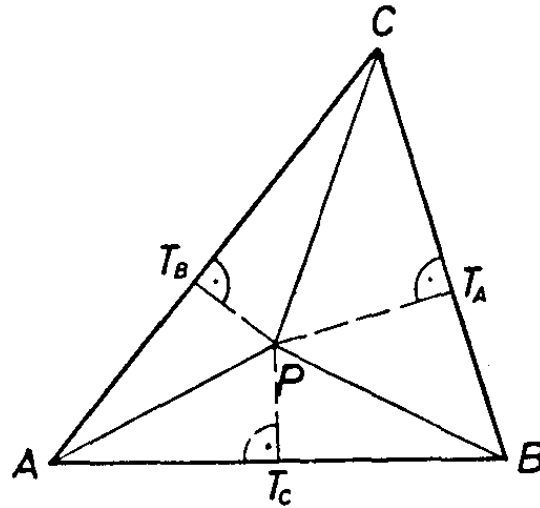


I. megoldás: A megoldást a következő megjegyzésre építjük. Egy háromszög egy csúcsát a szemközti oldal egy pontjával összekötő szakaszhoz egyértelműen tartozik egy arányszám, amelyre igaz, hogy egy pont akkor és csak akkor pontja a szakasznak, ha a pont és a szakasszal közös csúcsból induló oldalak távolságainak az aránya az adott érték.



1. ábra

Ha az ABC háromszög egy P pontjának merőleges vetülete a BC , CA és AB oldalon rendre T_A , T_B és T_C (1. ábra), akkor az AP , BP , CP egyenesekhez (ill. a háromszögbe eső szakaszaikhoz) tartozó arányok

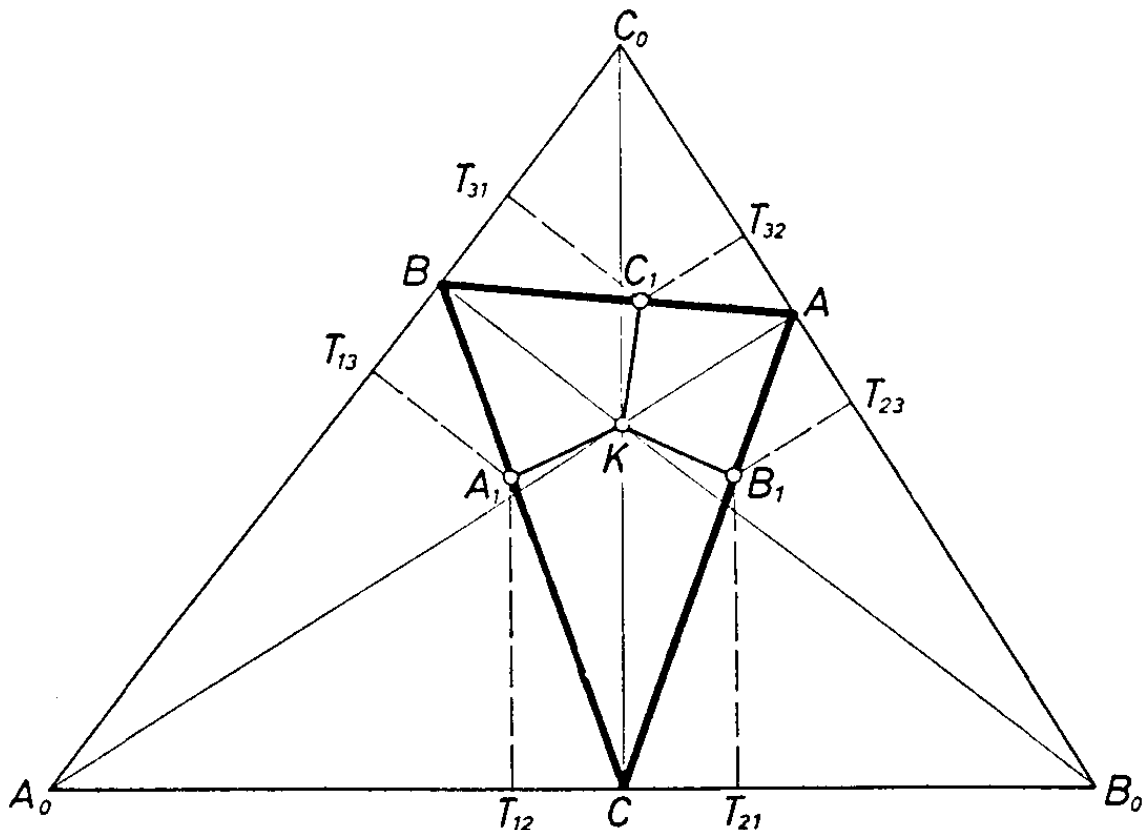
$$r_A = PT_B : PT_C, \quad r_B = PT_C : PT_A, \quad r_C = PT_A : PT_B,$$

és így

$$(2) \quad r_A r_B r_C = 1.$$

Ha fordítva, P egy az A csúcson és egy a B csúcson átmenő egyenes metszéspontja, akkor a két egyeneshez tartozó arány a fenti r_A és r_B érték. Ha fennáll (2), akkor r_C is a fenti érték, s így a C ponton átmenő egyenes is átmegy P -n.

Más szóval, ha az A, B, C csúcson átmenő egy-egy egyenesszakaszhoz tartozó arány r_A, r_B, r_C , akkor a szakaszok akkor és csak akkor mennek át egy ponton, ha teljesül (2).



2. ábra

A feladatra térve A_0, B_0, C_0 a megfelelő külső szögfelezők metszéspontja, így az A, B, C csúcsok az $A_0B_0C_0$ háromszög oldalaira esnek (2. ábra). Jelöljük az ABC háromszög szögeit a szokásos módon α, β, γ -val; A_1 merőleges vetületét az A_0B_0, A_0C_0 oldalon T_{12} -vel, illetőleg T_{13} -mal, és megfelelően a másik két pont vetületeit, amint az ábra mutatja. Ekkor az A_0A_1 egyenesre vonatkozó arány az $A_0B_0C_0$ háromszögben

$$r_a = \frac{A_1T_{12}}{A_1T_{13}} = \frac{A_1C \sin BCA_0}{A_1B \sin CBA_0} = \frac{A_1C \cos \frac{\gamma}{2}}{A_1B \cos \frac{\beta}{2}}.$$

Hasonlóan

$$r_B = \frac{B_1A \cos \frac{\alpha}{2}}{B_1C \cos \frac{\gamma}{2}}, \quad r_C = \frac{C_1B \cos \frac{\beta}{2}}{C_1A \cos \frac{\alpha}{2}},$$

és a három arány szorzata

$$\frac{A_1C \cdot B_1A \cdot C_1B}{A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A}.$$

Tudjuk azonban, hogy a háromszög egy szögének a felezője a szemközti oldalt olyan szakaszokra osztja, amelyeknek az aránya megegyezik a mellettük fekvő oldalak arányával. Ezt egymás után CKB, AKC , majd a BKA háromszögekre alkalmazva.

$$\frac{A_1C}{A_1B} = \frac{CK}{BK}, \quad \frac{B_1A}{B_1C} = \frac{AK}{CK}, \quad \frac{C_1B}{C_1A} = \frac{BK}{AK}.$$

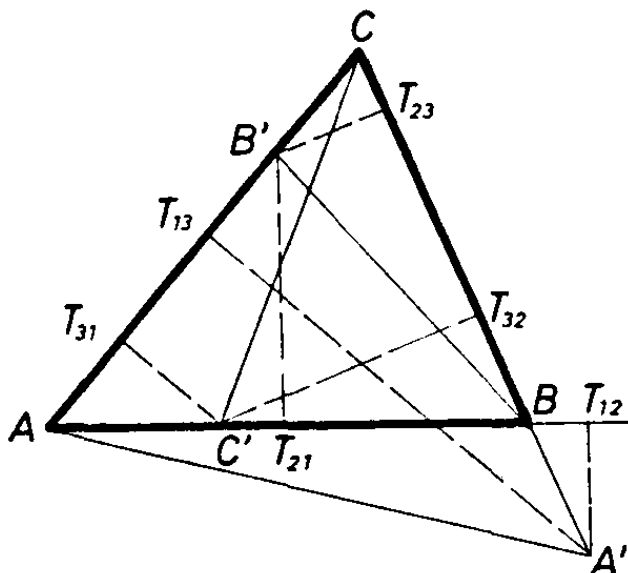
Ezek figyelembevételével azt kapjuk, hogy a fenti szorzat értéke 1, tehát az előrebocsátott megjegyzés értelmében a három egyenes egy ponton megy keresztül, és ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzések. 1. A K pontról csak annyit használtunk fel, hogy az ABC háromszögben van, így a feladat állítása a háromszög bármely K pontjára igaz.

2. A bevezető megjegyzésben a háromszög pontjaira szorítkoztunk. Ettől a megszorítástól azonban megszabadulhatunk, ha a háromszög oldalaitól mért távolságot előjelesen értjük: pozitívnak tekintjük azokra a pontokra, amelyek az oldalnak a háromszöget tartalmazó partján vannak, és negatívnak a másik felsík pontjaira. Ekkor csak a háromszög oldalegyeneseit célszerű kizárni.

3. Megvizsgáljuk most a kérdést ennek megfelelően tekintetbe véve az egész síkot. Legyen az ABC háromszög BC oldalának egy pontja A' , merőleges vetülete az AB és AC oldalon T_{12} és T_{13} (3. ábra). Ekkor – a háromszög szögeit a szokásos módon jelölve – az AA' egyenest jellemző arány

$$r_A = \frac{A'T_{12}}{A'T_{13}} = \frac{BA' \sin \beta}{A'C \sin \gamma}.$$



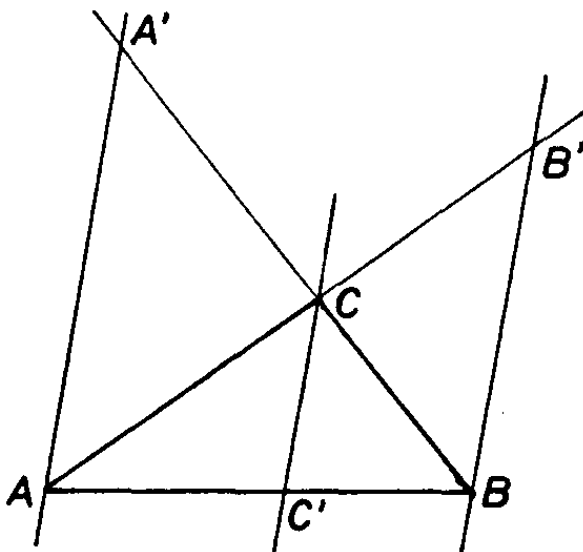
3. ábra

Ha B' és C' a CA , illetőleg az AB oldal egy-egy pontja, és felírjuk hasonló módon a BB' és a CC' egyenesre vonatkozó r_B és r_C arányt is, akkor a jobb oldalak szorzatában a számlálókban is, a nevezőben is ugyanaz a szinuszsorzat lép fel, így azzal egyszerűsíthetünk. Azt kapjuk tehát, hogy a (2) bal oldalán álló szorzat a következővel egyenlő:

$$(3) \quad \frac{BA' \cdot CB' \cdot AC'}{A'C \cdot B'A \cdot C'B}.$$

Az is látható, hogy a felírt arányegyenlőségek előjelet tekintve is helyesek maradnak, ha az oldalegyeneseken egy-egy irányt pozitívnak, az ellentéteset negatívnak tekintve előjeles szakaszokkal számolunk, és az egyenesektől mért távolságot is előjelezve értjük a korábban mondott módon. Irányítsuk az oldalegyeneseket például a háromszög óramutatóval ellentétes irányú körüljárásának megfelelően.

Az továbbra is fennáll, hogy ha az AA' , BB' , CC' egyenes egy ponton megy keresztül, akkor a (2) szorzat értéke, és így a (3) arányé is 1. A megfordítás helyességének igazolásánál a háromszögben futó két szakasz metszéspontjából indultunk ki. Most azonban felléphetnek párhuzamos egyenesek is.



4. ábra

Ha a három egyenes párhuzamos, válasszuk a betűzést úgy, hogy a C csúcса a másik kettőn át húzott párhuzamosok közé essék (4. ábra). Ekkor alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét az ABA' és a BAB' szögeket átmetsző párhuzamosokra:

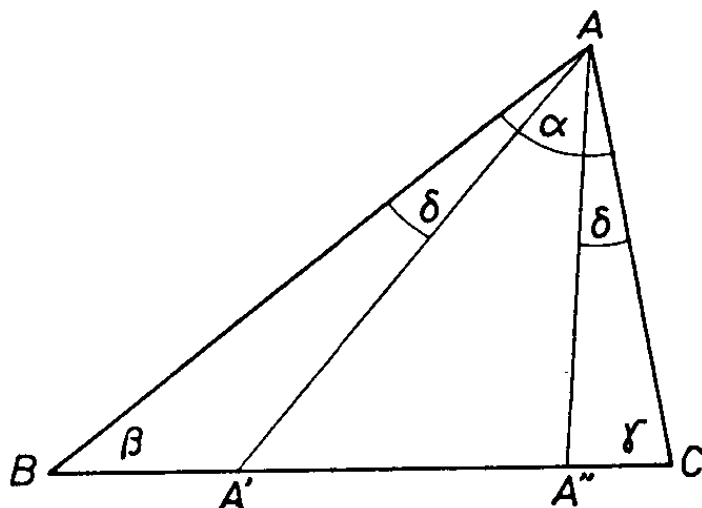
$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{BA}{AC'}, \quad \frac{CB'}{B'A} = \frac{C'B}{BA}.$$

Ezeket a (3) törtbe helyettesítve kapjuk, hogy annak az értéke akkor is 1, ha a három egyenes párhuzamos.

Megfordítva, ha AA' és BB' párhuzamos, akkor CC' nem metszheti őket, mert ha metszené, akkor korábbi megfontolásunk szerint BB' és CC' metszéspontján kellene átmennie AA' -nek is.

Azt kaptuk tehát, hogy véve az ABC háromszög BC , CA , AB oldalegyenesének egy-egy, a csúcsoktól különböző A' , B' , C' pontját, az AA' , BB' és CC' egyenesek egy ponton mennek át, vagy párhuzamosak akkor és csak akkor, ha a (3) arány értéke 1. Ez Ceva tétele. Ezt a versenyzők nagy része ismerte és felhasználta megoldásában.

4. Többen ismerték és felhasználták azt is, hogy ha a háromszög egy-egy csúcsán átmenő három egyenes egy ponton megy keresztül, vagy párhuzamosak az egyenesek, és mindegyiket tükrözzük a megfelelő szögfelezőre, akkor a tükrözött egyenesek is vagy egy ponton mennek át, vagy párhuzamosak.



5. ábra

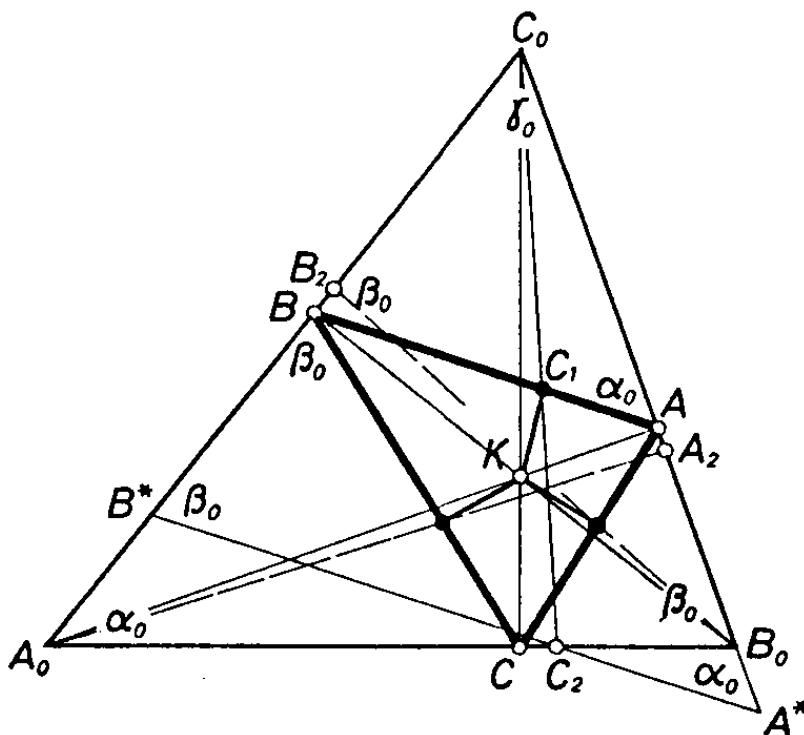
Valóban, legyen A' a BC egyenes egy pontja, és mossa az AA' egyenesnek az A csúcsból induló szögfelezőre vonatkozó tükörképe a BC egyenest az A'' pontban. A $BAA' \sphericalangle = \delta$ jelöléssel, mivel a szögfelezőre tükrözünk, $CAA'' \sphericalangle = \delta$ (5. ábra). Felhasználva a szinusz-tételt az $AA'B$, $AA'C$, $AA''B$, $AA''C$ háromszögekre

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{BA'/A'A}{A'C/A'A} = \frac{\sin \delta / \sin \beta}{\sin(\alpha - \delta) / \sin \gamma} = \frac{\sin \delta \sin \gamma}{\sin(\alpha - \delta) \sin \beta},$$

$$\frac{BA''}{A''C} = \frac{BA''/A''A}{A''C/A''A} = \frac{\sin(\alpha - \delta) / \sin \beta}{\sin \delta / \sin \gamma} = \frac{\sin(\alpha - \delta) \sin \gamma}{\sin \delta \sin \beta} = \frac{A'C \sin^2 \gamma}{BA' \sin^2 \beta}.$$

Felírva a megfelelő arányokat a BB' és a CC' tükörképének metszéspontjaként keletkező B'' és C'' pontokra is és összeszorozva őket, a számlálóban is, a nevezőben is a háromszög három szöge szinusza négyzetének szorzata keletkezik, így ezzel egyszerűsíthetünk. Azt kapjuk tehát, hogy a kétvesszős pontokra felírt (3)-nak megfelelő kifejezés a vesszős pontokra felírtak a reciprok értéke. Így Ceva tételéből következik a kimondott állítás helyessége.

II. megoldás: Jelöljük az $A_0B_0C_0$ háromszög szögeit rendre $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ -val; az A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 egyenesnek és az $A_0B_0C_0$ háromszög szemközti oldalának a metszéspontját A_2, B_2, C_2 -vel; húzzunk továbbá C_2 -n át párhuzamost a BA egyenessel, mossa ez a C_0A_0, C_0B_0 egyenest a B^* , illetve A^* pontban (6. ábra).



6. ábra

A háromszöghöz hozzáírt körök középpontjai a háromszög két-két külső és egy belső szögfelezőjének a metszéspontjai, továbbá az egy csúcsból induló belső és külső szögfelező merőleges egymásra, így az A , B , C csúcsok az $A_0B_0C_0$ háromszög oldalain fekszenek, a háromszög magasságainak talppontjai. Ennek folytán A_0BAB_0 hűrnégyszög, tehát

$$C_0BA\triangleleft = \beta_0, \quad C_0AB\triangleleft = \alpha_0;$$

a szerkesztés szerint pedig

$$C_0A^*B^*\triangleleft = C_0AB\triangleleft = \alpha_0, \quad C_0B^*A^*\triangleleft = C_0BA\triangleleft = \beta_0.$$

Eszerint $A_0B^*B_0A^*$ hűrnégyszög, mert B^*B_0 az A_0 és az A^* pontból ugyanakkora szögben látszik. Ekkor a C_2 -n átmenő szelők szeleteinek szorzata egyenlő:

$$A_0C_2 \cdot C_2B_0 = B^*C_2 \cdot C_2A^*.$$

Ez átrendezhető így:

$$\frac{A_0C_2}{C_2B_0} = \frac{B^*C_2}{C_2A^*} \left(\frac{C_2A^*}{C_2B_0} \right)^2.$$

A jobb oldalt átalakítjuk. A párhuzamos szelők tétele, továbbá a szögfelezőre vonatkozó osztásarányai tétel alapján

$$\frac{B^*C_2}{C_2A^*} = \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{BK}{KA}.$$

A második tényezőben az alap így alakítható át, a szinusz-tételt először az $A^*B_0C_2$ háromszögre, majd ellenkező irányban az $A_0B_0C_0$ háromszögre alkalmazva:

$$\frac{C_2A^*}{C_2B_0} = \frac{\sin(180^\circ - \beta_0)}{\sin \alpha_0} = \frac{\sin \beta_0}{\sin \alpha_0} = \frac{C_0A_0}{C_0B_0}.$$

Ezek szerint

$$\frac{A_0C_2}{C_2B_0} = \frac{KB}{KA} \left(\frac{C_0A_0}{C_0B_0} \right)^2.$$

Írjuk fel a megfelelő összefüggéseket A_2 -re és B_2 -re is:

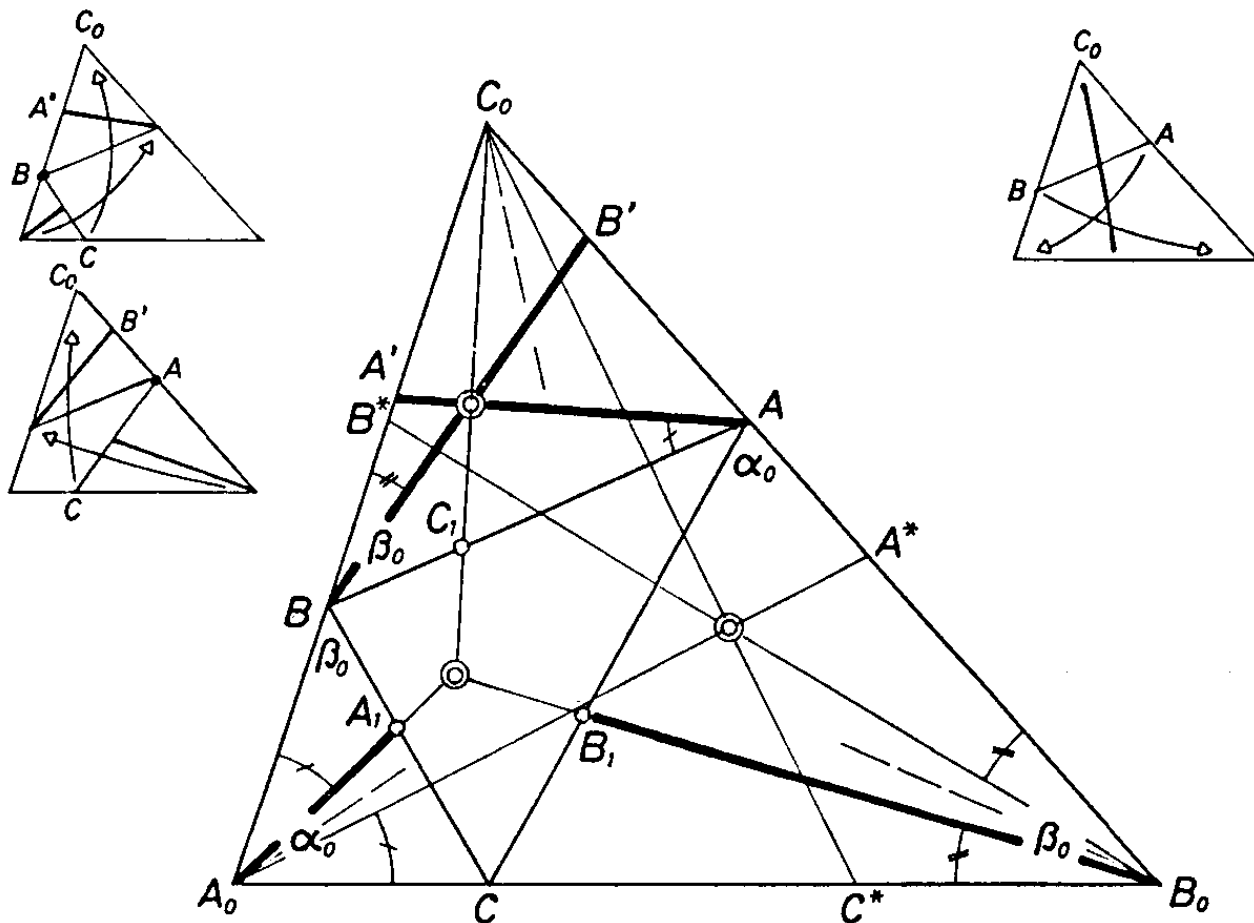
$$\frac{B_0A_2}{A_2C_0} = \frac{KC}{KB} \left(\frac{A_0B_0}{A_0C_0} \right)^2, \quad \frac{C_0B_2}{B_2A_0} = \frac{KA}{KC} \left(\frac{B_0C_0}{B_0A_0} \right)^2.$$

A három egyenlőség megfelelő oldalait összeszorozva a jobb oldalon 1-et kapunk, tehát

$$\frac{A_0C_2}{C_2B_0} \cdot \frac{B_0A_2}{A_2C_0} \cdot \frac{C_0B_2}{B_2A_0} = 1.$$

Mivel A_1 , B_1 , C_1 az ABC háromszög megfelelő oldalának belső pontja, így az A_0A_1 , B_0B_1 , C_0C_1 egyenesek nem lehetnek párhuzamosak, tehát Ceva tétele szerint egy ponton mennek keresztül.

III. megoldás: Az előző megoldás jelöléseit használva az ott követett gondolatmenet ismétlésével kapjuk, hogy $B_0AC\triangleleft = \alpha_0$ és $A_0BC\triangleleft = \beta_0$. Így az A_0BC , AB_0C , ABC_0 és $A_0B_0C_0$ háromszög hasonló. Az elsőt és a másodikat a harmadikba egy B , illetőleg A körüli forgatás és ugyanezen középpontú alkalmas hasonlósági transzformáció viszi át, a harmadikat a negyedikbe pedig egy tükrözés a C_0 -ból induló (belső) szögfelezőre és C_0 középpontú hasonlósági transzformáció. Mindezek a transzformációk a szakaszok arányát és a szögek nagyságát változtatlanul hagyják.



7. ábra

Vigye át az első és a második transzformáció A_0A_1 -et és B_0B_1 -et AA' -be, illetve BB' -be (7. ábra). Ekkor

$$\frac{BA'}{A'C_0} = \frac{BA_1}{A_1C}, \quad \frac{C_0B'}{B'A} = \frac{CB_1}{B_1A}.$$

A megfelelő oldalakat összeszorozva és szorozva még mindkét oldalt az AC_1/C_1B aránnyal, a jobb oldalon keletkező tört a szögfelezőre vonatkozó osztásarány tétel szerint 1 lesz, ez pedig Ceva tétele szerint azt jelenti, hogy az AA' , BB' és C_0C_1 egyenesek egy ponton mennek keresztül.

A fentebb említett harmadik transzformáció ezeket az egyeneseket az ugyancsak egy ponton átmenő A_0A^* , B_0B^* , C_0C^* egyenesekbe viszi át. Ezek közül az utolsó egyenes a C_0C_1 egyenes tükörképe a C_0 -ból induló szögfelezőre. Hasonló igaz azonban a másik két egyenesre is. Ugyanis a transzformáció például a BAA' szöget a $B_0A_0A^*$ szögbe viszi át, viszont az első transzformáció révén az előbbi szögbe a $BA_0A_1 \sphericalangle = C_0A_0A_1 \sphericalangle$ megy át, ami éppen azt jelenti, hogy A_0A_1 és A_0A^* egymás tükörképe az A_0 -ból induló szögfelezőre nézve. Hasonlóan okoskodhatunk a harmadik egyenes esetében is. Ekkor azonban A_0A_1 , B_0B_1 , C_0C_1 is egy ponton megy keresztül, mint egy ponton átmenő egyeneseknek a megfelelő szögfelezőkre vonatkozó tükörképei.