

I. megoldás. $M = 1$ természetesen megfelel, mivel k csak 1 lehet. Nagyobb M -ekre nézzük meg a $k = 2$ választást. Tudjuk, hogy egy szám 9-cel osztva ugyanannyi maradékot ad, mint a számjegyeinek az összege. Így

$$9 \mid M - S(M), \quad \text{és} \quad 9 \mid 2M - S(2M),$$

amiből, különbségüket képezve,

$$9 \mid (2M - S(2M) - (M - S(M))) = M - S(2M) + S(M) = M.$$

A feladat feltétele tehát az 1-en kívül csak 9-cel osztható számokra teljesülhet.

Tegyük fel, hogy M egy n -jegyű szám, amelyre teljesül a feladat feltétele:

$$10^{n-1} \leq M < 10^n,$$

és első jegye $a (\geq 1)$, $M = a10^{n-1} + A$, ahol A legfeljebb $(n-1)$ -jegyű. (Lehet 0 is; ha $n = 1$, akkor csak az lehet.) Mivel M osztható 9-cel, így nagyobb 10^{n-1} -nél, tehát k választható $10^{n-1} + 1$ -nek. Ekkor

$$kM = (10^{n-1} + 1)M = 10^{n-1}(M + a) + A.$$

Az első tag $(n-1)$ darab 0-val végződik, a második legfeljebb $(n-1)$ -jegyű, tehát az összeadásnál minden jegyét 0-hoz kell adni. A számjegyösszeg tehát a két tag jegyösszegének az összege.

Az első tag jegyösszegét a végén álló nullák nem befolyásolják, így annak jegyösszege $S(M + a)$. A jegyei azonosak M jegyeivel, a kivételével, így $S(A) = S(M) - a$. A feladat feltétele tehát akkor teljesül, ha $S(M + A) = a$.

Ha $M + a$ is n -jegyű, akkor első jegye vagy a , és ekkor van még 0-tól különböző jegye, mivel nagyobb M -nél, vagy pedig $a + 1$ az első jegye. Jegyösszege mindkét esetben nagyobb a -nál. Ha $M + a$ $(n+1)$ -jegyű, tehát legalább 10^n , akkor

$$10^n > M \geq 10^n - a \geq 10^n - 9,$$

ebbe a számközbe pedig csak egy 9-cel osztható szám esik: $10^n - 1$, vagyis az n darab kilencessel írt szám. (n tetszőleges pozitív egész szám.)

Megmutatjuk, hogy az ilyen alakú számok megfelelnek. Legyen $M = 10^n - 1$ és $2 \leq k \leq M$. Ekkor

$$kM = (k-1)10^n + 10^n - k = (k-1)10^n + (10^n - 1) - (k-1).$$

Itt az első tag n darab 0-val végződik, a második az n darab kilencessel írt szám, a kivonandó pedig legfeljebb n -jegyű. Így a jegyösszeg ismét az első tag jegyösszegének és a különbség jegyösszegének az összege. Az első tag jegyösszege $S(k-1)$, a különbség képzésénél pedig $k-1$ minden jegyét 9-ből kell levonni, tehát átvitelre nem kerül sor. Így a különbség jegyösszege $9n - S(k-1)$. kM jegyösszege tehát $9n$, ami megegyezik $S(M)$ -mel. Ezt akartuk belátni.

II. megoldás. Az előző megoldásból átvesszük azt, hogy csak 9-cel osztható számok jönnek szóba, és hogy az 1 és a $10^n - 1$ alakú számok megfelelnek. Ezekre támaszkodva látjuk be, hogy ezek már megadják az összes megfelelő számot.

Legyen M egy 1-nél nagyobb megfelelő szám. Legyen hozzá n az a pozitív egész, amelyre $(10^n - 1)/9 \leq M < (10^{n+1} - 1)/9$. Az alsó korlátot választva k -nak

$$S(kM) = S((M/9)(10^n - 1)).$$

Itt $M/9 < (10^{n+1} - 1)/81 < (10^n - 1)$. Mivel $(10^n - 1)$ -re teljesül a feladat feltétele,

$$S\left(\frac{M}{9}(10^n - 1)\right) = S(10^n - 1) = 9n.$$

Ha M n -jegyű, akkor ez csak úgy egyezhet meg $S(M)$ -mel, ha M az n darab kilencessel írt szám, $10^n - 1$. Ha M $(n+1)$ -jegyű, akkor első jegye csak 1 lehet és a további jegyei közt kell 0-nak lennie, mert kisebb a csupa egyessel írt számnál. Ekkor azonban jegyösszege legfeljebb $1 + 9(n-1) < 9n$ volna. A feltételnek tehát valóban csak a mondott számok felelnek meg.

Ez Fleiner Tamás megoldása.

Megjegyzések: 1. Ugyanígy adódik tetszés szerinti b alapú számrendszer esetén, hogy az 1 és a csupa $(b-1)$ -es jeggyel írt számok a kívánt tulajdonságúak.

2. Láttuk, hogy a 9-cel nem osztható számok már $k = 2$ -re sem elégítik ki a megkívánt egyenlőséget. Nem látszik azonban könnyű kérdésnek, hogy egy 9-cel osztható számhoz melyik a legkisebb k , amelyiknél ez bekövetkezik. A II. megoldás valamivel nagyobb k -ra mutatja ezt meg, mint az I. Sok számhoz található, azonban annál is jóval kisebb „rossz” k érték. Már a 2 ilyen pl. 324-hez, a 3 a 126-hoz, a 4 a 117-hez, az 5 a 351-hez, a 6 a 189-hez, viszont 198-hoz az I. megoldás szolgáltatja 101 a legkisebb k érték. Nem nagyon látszik, hogy ez a legkisebb k érték a szám milyen tulajdonságaitól függ.