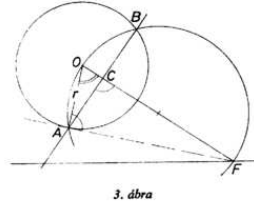


Messe az OF -nek a körrel való metszéspontján át e -vel párhuzamosan húzott egyenes f^* -ot G -ben (2. ábra). Ekkor $GO = r \operatorname{ctg} \alpha$, (2) jobb oldala tehát a GO/MO aránnyal egyenlő. Ezt akarjuk úgy vetíteni, hogy a nevező r hosszúságú szakaszba menjen át. Messe az MO és a kör metszéspontján át MO -ra merőlegesen állított egyenes e -t H -ban, a H -ból OF -re bocsájtott merőleges utóbbit I -ben, végül FG és HI metszéspontja legyen J . Ekkor $HI = r$, és így a párhuzamos szelők tétele szerint $GO/MO = JI/HI = JI/r$. A keresett x_0 szakasz tehát JI . Ezt felmérve O -ból OF -re és végpontjában merőlegest állítva OF -re kapjuk a keresett egyenest.

Megjegyzések: 1. A szelő jellemzésére használhatjuk pl. az AOC szöget, vagy más paramétert is.

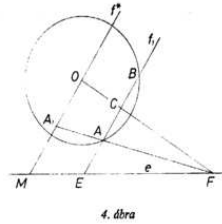
2. A (2) jobb oldalán álló törtet $\operatorname{tg} \alpha$ -val bővítve az $x_0/r = r/d \operatorname{ctg} \alpha$ összefüggést kapjuk. Itt $d \operatorname{tg} \alpha = OF$ (3. ábra), így a nyert egyenlőségből leolvasható, hogy az AOC és az FOA háromszög hasonló. Az O -nál levő szögük ugyanis közös és egy megfelelő oldalpárjuk aránya egyenlő. Az előbbi háromszög C -nél levő szöge derékszög, tehát az utóbbiban FA merőleges az OA körsugárra. A keresett szelő metszéspontjai a körrel tehát az F -ből húzott érintők érintési pontjai. Ezt nem nehéz közvetlenül belátni.



II. megoldás: Legyen α hegyesszög. Az f -fel párhuzamos érintőkre az AB/EA arány 0, aminél lehet nagyobb is. Akkor a legnagyobb, amikor az AC/EA arány, ez pedig akkor, amikor a reciproka a legkisebb. Azt még 1-gyel növelve az

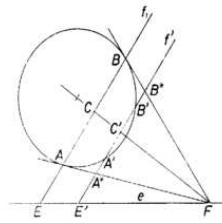
$$\frac{EA}{AC} + 1 = \frac{EA + AC}{AC} = \frac{EC}{AC}$$

arány minimumát szolgáltató szelőt keressük.



FA és MO metszéspontját A_1 -gyel jelölve $EC/AC = MO/A_1O$ (4. ábra). Itt a számláló nem függ a szelő helyzetétől, így az arány akkor a legkisebb, amikor a nevező a legnagyobb, ez pedig az F -ből húzott érintő érintési pontjára teljesül.

Az F -ből húzott érintők érintési pontját az OF átmérőjű kör metszi ki az adott körből.



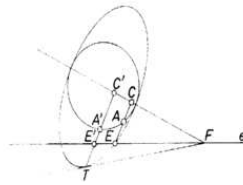
Legyen most f_1 ezeken a pontokon átmenő szelő, f' egy másik, és azon E' , A' , C' a megfelelő metszéspontok, A^* pedig az FA -val való metszéspont (5. ábra). Ekkor

$$E'A' > E'A^*, \quad A'C' < A^*C', \quad \text{tehát} \quad A'C'/E'A' < A^*C'/E^*C',$$

vagyis a feladatban kért arány valóban a megszerkesztett egyenesen a legnagyobb.

Ha e és f merőleges, akkor f^* -ra lesz EB a lehető legnagyobb, EA pedig a legkisebb, tehát a vizsgált arány a legnagyobb. Ennek az egyenesnek a szerkesztése közismert.

Megjegyzések. 1. Okoskodhatunk a következő módon is. Tetszés szerinti f_1 szelőt véve, a kört egy OF tengelyű és EC/AC arányú merőleges affinitás olyan ellipszisbe viszi át, amelyiknek van közös pontja e -vel. Ha van az ellipszisnek pontja az e -nek a kört nem tartalmazó partján is, akkor az F -ből húzott egyik érintő is ezen az oldalon van, és annak az érintési pontját egy kisebb arányú affinitás viszi át e -re (6. ábra).



6. ábra

Az arány tehát akkor a legkisebb, ha az e -t érintő ellipszist kapjuk, vagyis e az F -ből a körhöz húzott érintő képe. Arra a szelőre lesz tehát a nyújtás aránya a legkisebb, s így a feladatban kért arány a legnagyobb, amelyik az F -ből húzott érintő érintési pontján megy át. Ezen az úton oldotta meg a feladatot Újváry-Menyhárt Zoltán.

2. Gerlits Ferenc számítással oldotta meg a feladatot, de az analízis használata helyett csak a másodfokú egyenletekre vonatkozó ismeretekre támaszkodva.

III. megoldás. Az I. megoldásban láttuk, hogy azt az x értéket kell megkeresnünk, amelyekre a $\frac{(d - x \operatorname{ctg} \alpha)^2}{r^2 - x^2} = c$ arány a legkisebb. Más szóval a legkisebb c -t, amelyekre a

$$(c + \operatorname{ctg}^2 \alpha)x^2 - (2d \operatorname{ctg} \alpha)x + d^2 - cr^2 = 0$$

egyenletnek van megoldása, annak abszolút értéke r -nél kisebb és c pozitív. Az egyenletnek akkor van (valós) megoldása, ha nem negatív a diszkriminánsa. A diszkrimináns

$$4(d^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha - (c + \operatorname{ctg}^2 \alpha)(d^2 - cr^2)) = 4c(cr^2 - (d^2 - r^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha)).$$

Ez kell, hogy ne legyen negatív. Mivel c -nek pozitívnak kell lennie, tehát a második tényező sem lehet negatív. Innen

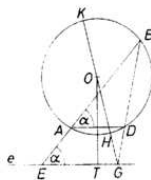
$$c \geq (d^2 - r^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha)/r^2.$$

Ha ezt a kritikus értéket beírjuk az egyenletbe, az

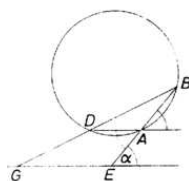
$$((d/r)x - r \operatorname{ctg} \alpha)^2 = 0$$

alakra hozható. Ez az I. megoldásban nyert, r -nél kisebb x_0 értéket szolgáltatja.

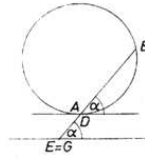
IV. megoldás. Húzzunk A -n át párhuzamost e -vel, messe ez a kört másodszor D -ben. Ha érintőt kapunk, akkor $D = A$ (7.a, b, c ábra).



7.a ábra



7.b ábra

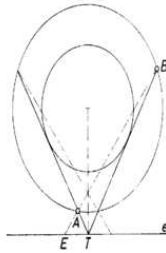


7.c ábra

Ekkor a rövidebb BD ívet α szögű (esetleg csúcs-) szögtartomány foglalja magába, így a BD húr hossza csak α -tól függ, az AB szelő helyzetétől nem. BD és e metszéspontját G -vel jelölve a párhuzamos szelők tétele szerint $AB/EA = DB/GD$. Ez tehát akkor a legnagyobb, ha GD a legkisebb, egyúttal, BD állandó volta miatt GB is, s így $GD \cdot GB$, ami G hatványa a körre, szintén a legkisebb. Ez a szorzat minden G -n átmenő szelőre ugyanakkora, így az O -n átmenőre is. Ennek a körbe eső húrja átmérő, független a G pont helyzetétől, így a hatvány az e egyenesnek a körhöz legközelebb eső pontjára, O -nak e -n való T merőleges vetületére lesz a legkisebb. Az ezt szolgáltató, f -fel párhuzamos egyenest kell tehát megszerkesztenünk.

Az egyenlő hosszúságú húrok egy O középpontú ($r \cos \alpha$ sugarú) kör érintői. Ehhez a körhöz megszerkesztjük T -ből a két érintőt. Mindkettőnek a T -től távolabbi metszéspontját a másik közelebbi metszéspontjával kötve össze, két egyenest kapunk (8. ábra), amelyek α nagyságú szöget zárnak be e -vel egyik, illetőleg másik irányban. Egyikük tehát párhuzamos f -fel. A követett gondolatmenet megfordításával látható, hogy ez valóban a keresett egyenes.

Ezt a megoldást Fleiner Tamás adta.



8. ábra

V. megoldás. Ismét deriváltat használunk, de kiszámítása helyett geometriai jelentéséből vonunk le következtetéseket.

Legyen α hegyesszög. Koordinátatengelyeknek válasszuk az O -n átmenő, f -re merőleges és a vele párhuzamos egyenest. Ekkor CA az $OC = x$ változónak azt a $-r \leq x \leq r$ számközön értelmezett g függvényét szemlélteti, amelyiknek a képe a tengely fölötti félkör, AE pedig ugyanezen a szakaszon azt a h függvényt, amelyre $g + h$ képe az e egyenesnek a szakasz feletti része. A g/h függvény legnagyobb értékét keressük.

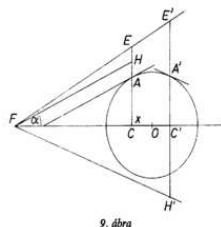
Ez a függvény értelmezve van az egész számközön, mivel e -nek nincs közös pontja a körrel, s így a nevező nem 0. A végpontokban a hányados értéke 0, máshol pozitív, így maximuma helyi maximum is, ott a derivált 0, s így annak számlálójára:

$$(3) \quad g'h - gh' = 0$$

teljesül. Itt g' a kör A -ban húzott érintőjének az irántangense, h' pedig a $(g + h)' = g' + h'$ összefüggésből kapható. Itt ugyanis a bal oldalon az e egyenes irántangense, $\tan \alpha$ áll, tehát

$$h' = \tan \alpha - g'.$$

Innen látjuk, hogy a két derivált nem lehet egyszerre 0, tehát (3) csak úgy teljesülhet, ha egyik sem 0.



9. ábra

Húzzunk F -ből párhuzamost az A -ban húzott érintővel (9. ábra), jelöljük CA -val való metszéspontját H -val. Ez a tartomány belsejében levő C pontokra mindig létezik. Ekkor $\operatorname{tg} \alpha = CE/FC$, az érintő iránytangense CH/FC (negatív, ha H a tengely alatt van), így $h' = CE/FC - CH/FC = HE/FC$ (negatív, ha H az e egyenes fölött van).

Írhatjuk (3)-at, mivel fennállása esetén a deriváltak nem tűnhetnek el, $g'h' = g/h$ alakban. A jobb oldali arány CA/AE -vel egyenlő, a bal oldalon álló pedig megállapításaink szerint a következővel:

$$\frac{\frac{CH}{FC}}{\frac{HE}{FC}} = \frac{CH}{HE}.$$

Rögzített C és E pontok mellett a CE egyenes különböző P pontjaira a CP/PE arány különböző, ha előjeles arányt nézünk, mint esetünkben. A (3) egyenlőség tehát csak akkor állhat fenn, ha $H = A$, vagyis az F -en át az A -beli érintővel párhuzamosan húzott egyenes átmegy A -n, azaz A az F -ből a körhöz húzott érintő érintési pontja. Ezzel először is azt kaptuk, hogy a törtnek egy szélsőértéke van, mivel pedig kell egy maximumának lennie, így ez a szélsőérték maximum. Azt is kaptuk, hogy ezt az F -ből a körhöz húzott érintő érintési pontján átmenő egyenes szolgáltatja.

Megjegyzés. A bizonyítás szellemes alapötlete Bodor András dolgozatában található. Számos, analízisbeli eszközöket használó megoldással ellentétben a megoldás geometriai tartalmát mutatja meg. Ez természetesen egyszerűbben nyerhető elemi úton, mint pl. a II. megoldásban láttuk.