

Megoldás. 1. Ha a középső elem egy adott b szám, akkor az első elem az $1, 2, \dots, b-1$ számok valamelyike lehet, a harmadik pedig a $b+1, \dots, n$ számok valamelyike. Az előbbiek száma $b-1$, az utóbbiaké $n-b$. A kettő közül a kisebbik – vagy közös értékük, ha a kettő egyenlő –, adja meg, hogy b maximálisan hány hármasban léphet fel középső elemként.

Természetesen $2 \leq b \leq n-1$, és az elmondottak szerint a 2 és az $n-1$ egyszer, a 3 és az $n-2$ kétszer léphet fel maximálisan, és így tovább. Így a kiválasztható hármasok számára a következő felső korlátot nyertük: ha n páros, $n = 2k$ akkor

$$2 \cdot (1 + 2 + \dots + k - 1) = k(k-1) = n(n-2)/4;$$

ha n páratlan, $n = 2k + 1$, akkor

$$2 \cdot (1 + 2 + \dots + k - 1) + k = k^2 = ((n-1)/2)^2.$$

2. Ennyi hármas ki is választható a feltételnek megfelelő módon minden esetben. Vegyük például az $\{a, b, a+b\}$ alakú hármasokat, ahol $1 \leq a < b$ és $a+b \leq n$. Itt a hármas bármelyik két eleme meghatározza a harmadikat, így két különböző hármasnak legfeljebb egy helyen lehet egyező eleme.

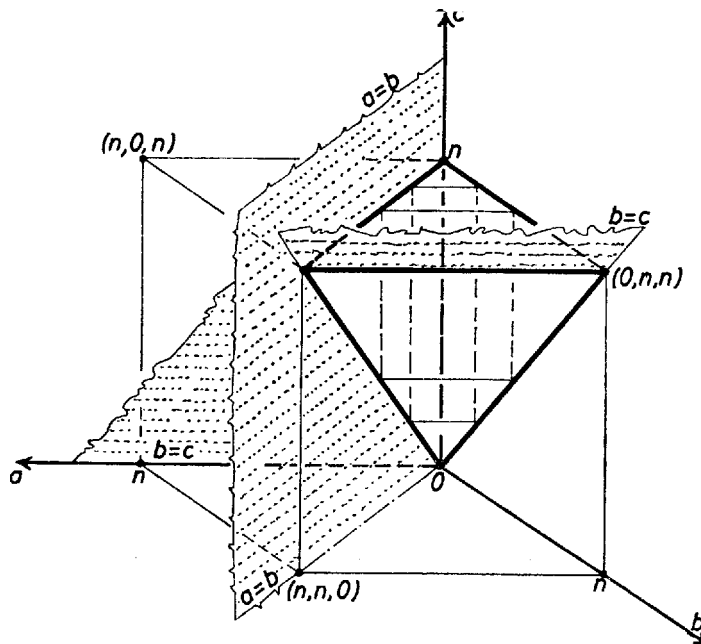
Az is látható, hogy ha $b \leq n/2$, akkor első elemnek 1 -től $b-1$ -ig minden érték előfordul, mert b -hez adva még n -nél kevesebbet ad, ha pedig $b > n/2$, akkor harmadik elemként $b+1$ -től (amikor $a=1$) n -ig minden érték előfordul, mert a hozzájuk tartozó első elemre $a = c - b < n - n/2 = n/2$, és ez kisebb b -nél. A kiválasztott hármasok száma tehát annyi, mint a felső korlátként kapott érték.

Megjegyzések: 1. A nyert eredmény írható az egészrész jelével egy formulában $\left[((n-1)/2)^2 \right]$ alakban.

2. Más módokon is választhatunk ki maximális számú hármasokból álló rendszert. Ilyenek pl. az $\{a, a+d, n+1-d\}$ hármasok, ahol $1 \leq d \leq \frac{n-a}{2}$, vagy az $\{a, a+d, a+2d\}$ hármasok, ahol $1 \leq d \leq \frac{n-a}{2}$;

3. A megoldásban csak azt használtuk ki, hogy két hármas az első és második elemében, továbbá a második és harmadik elemében nem egyezhet meg. Akkor sem lehet tehát több hármas kiválasztani, ha azt megengedjük, hogy két hármas az első és harmadik elemében megegyezzenek.

4. A megoldást szemléletessé tehetjük úgy, hogy a számhármasokat térbeli koordinátáknak tekintjük. Ekkor az első síknyolcadban keressük azokat az egész koordinátájú pontokat, amelyek az n élhosszúságú kockában vannak, és az $a=b$ egyenletű átlós síknak a pozitív b -tengelyt, továbbá a $b=c$ egyenletűnek a pozitív c -tengelyt tartalmazó oldalára esnek (a határsíkot már kizárva); végül a koordinátaegyezések kizárására vonatkozó kikötés geometriailag azt jelenti, hogy a tengelyekkel párhuzamos egyeneseken csak egy-egy kiválasztott pont lehet.



6. ábra

A síkok a kockából egy tetraédert vágnak ki (6. ábra). Ebből kell az utolsó feltételnek is megfelelően maximális számú pontot kiválasztani. Az egy adott b értékhez tartozó pontok a tetraéder egy téglalap alakú metszetébe eső egész koordinátájú pontok. Ezek közül nem választható ki több, mint ahány egész c értékhez tartozó, a -tengellyel párhuzamos egyenes van a téglalapon, sem annál több, mint az egész a értékhez tartozó, c tengellyel párhuzamos egyenesek száma, vagyis nem választható ki több, mint a két szám kisebbike. Ez pedig a fent nyert becsléshez vezet.

5. Többen azzal vélték megoldani a feladatot, hogy megadták a hármasoknak egy rendszerét (történetesen a főntebb említettek valamelyikét) és azt mutatták meg, hogy ezekhez nem vehető hozzá további hármas a kikötések megsértése nélkül. Ebből azonban még nem következik, hogy a kiválasztott hármasok száma maximális. Az első 5 számból válogatva pl. az $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$ rendszer nem bővíthető, de tudjuk, hogy kiválasztható 4 hármas is úgy, hogy ne sértse meg az előírásokat.

Ezzel kapcsolatban felmerül egy probléma is. Az $1, 2, \dots, n$ számok közül úgy akarunk kiválasztani a feladat feltételeinek megfelelő hármasokat, hogy további hármas már ne lehessen hozzávenni. Mi az ilyen rendszerek elemszámának a minimuma? Könnyű látni, hogy $n = 5$ -re két hármas még nem zárhat ki minden további, így a kért minimum 3. Az előző megjegyzésben leírt szemléltetés segítségével sikerült $n = 6, 7, 8, 9$ -re rendre 5, 7, 10, illetőleg 13 hármasból álló, nem bővíthető rendszert találni, de lehet, hogy ezek nem a minimális értékek. (A kiválasztható hármasok maximális száma ezekre az n értékekre 6, 9, 12, illetőleg 16.)

Ha a feltételt a 3. megjegyzésben említett gyengébbel helyettesítjük, akkor már igaz, hogy a hármasok minden olyan rendszere, amelyik nem bővíthető, maximális elemszámú. Valóban, két különböző középsőelemű hármas nem zárja ki egymást, ha pedig azok közt, amelyek középső eleme ugyanaz a b érték, és nem fordul elő $b \leq \frac{n}{2}$ esetén valamilyen $a < b$ érték első elemként, illetőleg $b > n/2$ esetén valamilyen $b + 1$ és n közti c érték harmadik elemként, akkor van olyan $\{a, b, c\}$ hármas, amelyik hozzávehető a rendszerhez, mert az előbbi esetben a harmadik helyre, az utóbbiban az első helyre legalább annyi szám áll rendelkezésre, mint a másik helyre.