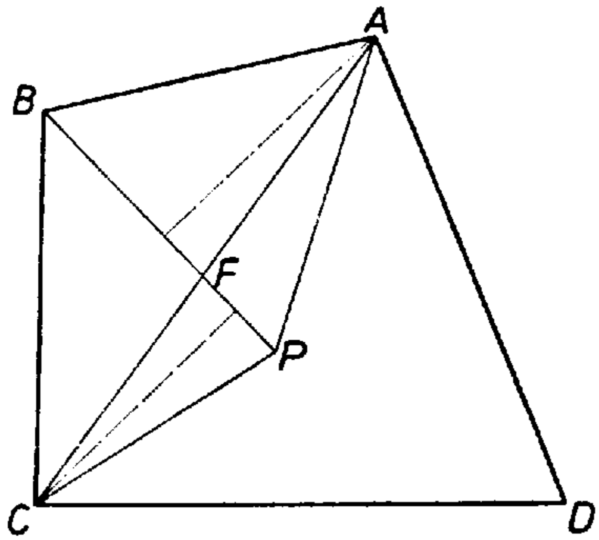
I. megoldás. Azt mutatjuk meg, hogy ha van a feladatban leírt tulajdonságú P pont, akkor az az egyik átlón van (az átló felezőpontja). Ebből következik a feladat állítása, mert ha P például a BD átlón van, akkor a BCD háromszög a PBC és a PCD háromszög egyesítése. A részháromszögek területe a négyszög területének negyedrésze, így a BD átló két egyenlő területű részre osztja a négyszöget.

A továbbiakban egy $KL\ldots V$ sokszög területét $\tau_{KL\ldots V}$-vel fogjuk jelölni.



1. ábra

Mivel τ_{ABP} és τ_{BPC} egyenlő, és a két háromszög BP oldala közös, így a rá merőleges magasságok is egyenlők. A és C tehát egyenlő távol van a BP egyenestől, annak két oldalán (1. ábra). Ebből következik, hogy az egyenes átmegy az AC átló F felezőpontján. Ugyanígy nyerjük, hogy DP is átmegy F-en. Ha a két egyenes különböző, akkor csak egy metszéspontjuk van, így P azonos F-fel, vagyis P az AC átlón van. Ha viszont a két egyenes egybeesik, akkor ez az egyenes a BD átló egyenese, tehát ekkor P a BD átlón van. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzések. 1. Nyilvánvalóan igaz a feladat állításának a megfordítása: Ha valamelyik átló felezi a négyszög területét, akkor van olyan P pont a négyszög belsejében, amelyikre

$$\tau_{ABP}=\tau_{BCP}=\tau_{CDP}=\tau_{DAP}.$$

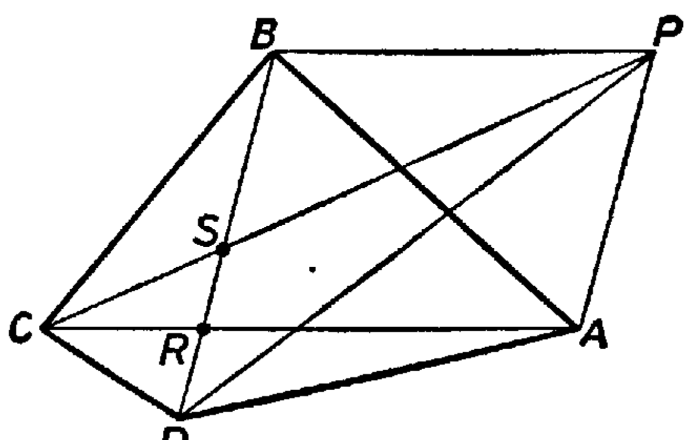
Nyilván ilyen pont a területet felező átló felezőpontja.

2. Az utolsó mondatban mondhattuk volna: „ez a pont ...”, mert legfeljebb egy ilyen pont lehet a négyszög belsejében. Ha ugyanis a P pontra a 4 háromszög területe egyenlő és egy P' pont pl. az ABP háromszög P-től különböző pontja, akkor

$$\tau_{ABP'}<\tau_{ABP},$$

így P'-re nem teljesülhetnek a megfelelő egyenlőségek.

3. Lényeges az a kikötés, hogy a P pont a négyszög belsejében legyen, ugyanis létezhet a négyszögön kívül is olyan pont, amelyikre a négy háromszög területe ugyanakkora. Induljunk ki egy $APBR$ paralelogrammából. A BR oldalon válasszunk ki egy S pontot R-hez közelebb, mint B-hez. Legyen C a PS és AR egyenes metszéspontja, D pedig B-nek az S-re vonatkozó tükörképe (2. ábra).

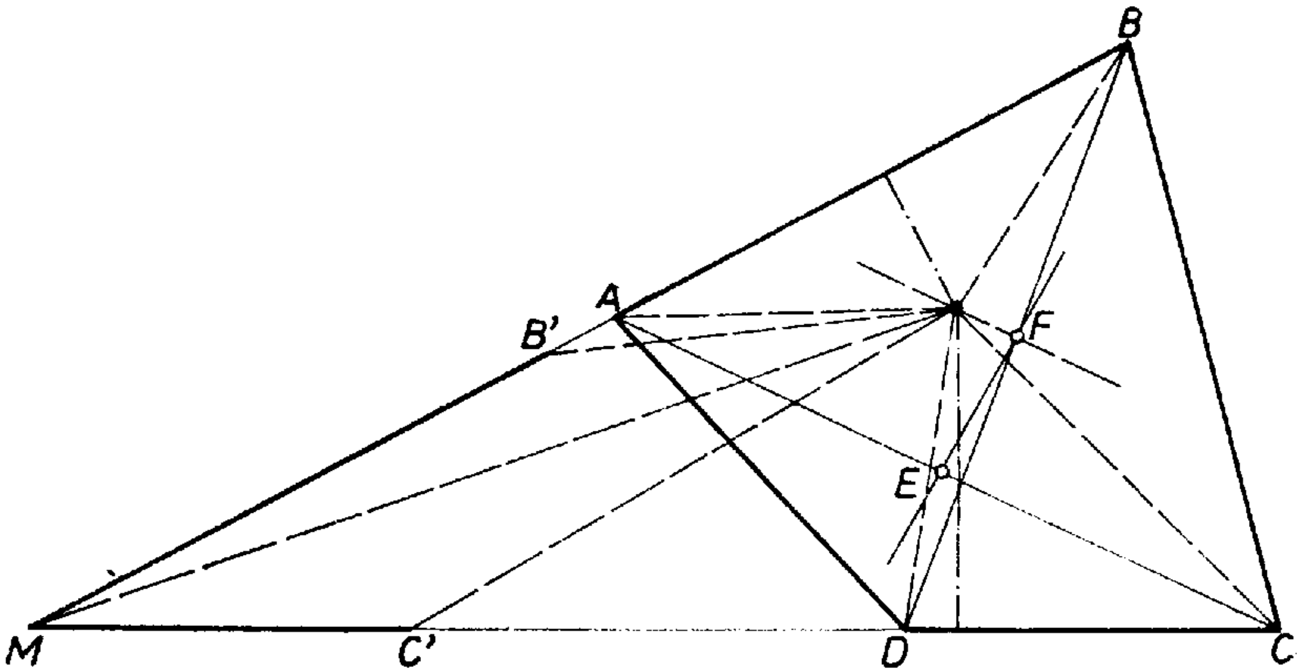


2. ábra

S választása folytán C az AR szakasz R-en túli meghosszabbításán van, D pedig BR-nek az R-en túli meghosszabbításán, tehát az $ABCD$ négyszög konvex. Ekkor könnyen látható, hogy a PDA, PAB, PBC, PCD háromszögek területe egyenlő, viszont P nincs rajta egyik átlón sem.

Belátható, hogy minden ellenpélda ilyen felépítésű, annak alapján, hogy ha két háromszög területe egyenlő és egy oldaluk közös, akkor a közös oldal egyenese vagy felezi a harmadik csúcsokat összekötő szakaszt, vagy párhuzamos vele.

II. megoldás: Paralelogrammák esetén egyrészt az átlók metszéspontja megfelel P pontnak, másrészt mind a két átló felezi a négyszög területét, tehát a feladat állítása igaz. A továbbiakban paralelogrammáktól különböző négyszögekre szorítkozunk. Tegyük fel, hogy AB és CD nem párhuzamos.



3. ábra

Ha egy P pontra teljesülnek a feladat feltételei, akkor az $ABCP$ négyszög területe az adott négyszög területének a fele. Az olyan P pontok, amelyektől csak ennek teljesülését kívánjuk meg, egy AC-vel párhuzamos egyenesen vannak, mert az ABC háromszög területe nem függ a P pont helyzetétől, így az ACP háromszög területének is egy megadott értéknek kell lennie (3. ábra). Ez az egyenes lehet AC bármelyik oldalán, vagy lehet az átló egyenese is. A BD átlót ez az egyenes az F felezőpontjában metszi, mert

$$\tau_{ABF} = \frac{1}{2}\tau_{ABD} \quad \text{és} \quad \tau_{BCF} = \frac{1}{2}\tau_{BCD},$$

a jobb oldalon szereplő háromszögek pedig együtt az adott négyszöget adják.

A feladat feltételeit kielégítő P pontra az ABP és CDP háromszögek területének az összege is az adott négyszög területének a felét adja. Az ezt a feltételt kielégítő P pontok is egy egyenesen sorakoznak. Feltettük, hogy az AB és a CD egyenes nem párhuzamos. Jelöljük metszéspontjukat M-mel és a betűzést válasszuk úgy, hogy ez az oldal A-n, illetőleg D-n túli meghosszabbítására essék. Toljuk el ezután az oldalakat egyenesük mentén úgy, hogy A, illetőleg D az M pontba kerüljön. A keletkező MB', illetőleg MC' oldalakra P-ből húzott magasság nem változott meg, így az $MB'C'P$ négyszög területe is az eredeti négyszög területének a fele, a keresett pontok tehát egy $B'C'$-vel párhuzamos egyenesen vannak, amint azt az előzőekben beláttuk.

Ez az egyenes átmegy az átlók felezőpontján, ugyanis a CDF háromszög területe is a BCD háromszög területének a fele, így az ABF és a CDF háromszög együttes területe az $ABCD$ négyszög területének a fele. Ugyanígy belátható, hogy az AC átló E felezőpontja is a szóban forgó egyenesen van. A P pont ezek szerint az EF egyenesnek és az F ponton át AC-vel párhuzamosan húzott egyenesnek a metszéspontja, vagyis F, ha a két egyenes különbözik. Ez esetben a BD átló felezi az $ABCD$ négyszög területét.[1] A két egyenes akkor esik egybe, ha az elsőnek említett egybeesik az AC egyenessel. Ekkor viszont P az AC átlón van, s így ez az átló felezi a négyszög területét.

Megjegyzések: 1. A megoldásban két mértani hely szerepelt, amelyek a következő alakban egyesíthetők: Adott a síkban két szakasz, keressük azoknak a pontoknak a mértani helyét, amelyeket a két szakasz végpontjaival összekötve

[1] Ábránk esetében nincs a feltételt kielégítő P pont, sem a négyszög területét felező átló, annak érdekében, hogy a két mértani hely különváljék.

a keletkező két háromszög területének az összege egy adott érték. A feladat megoldásához nem volt szükség a mértani hely pontos meghatározására.

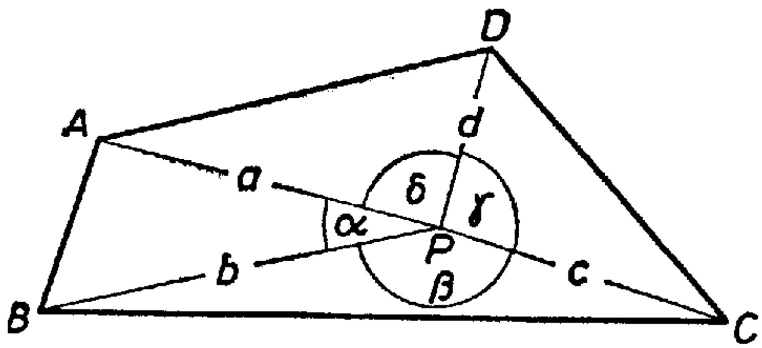
A feladat megoldása során azt is láttuk, hogy ha a két szakasz nem párhuzamos, akkor az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy egyik végpontjuk közös. Ez esetben a két szakasz egy-egy félegyenest határoz meg, és a mértani helynek a köztük levő szögtartományba eső részét egy, a másik végpontokat összekötő egyenessel párhuzamos egyenes tartalmazza. Könnyű látni, hogy a mértani helynek a szögtartományba eső része az egyenes ideeső szakasza, és az egész mértani hely annak a paralelogrammának a határa, amelyiknek ez a szakasz az egyik oldala és középpontja a szakaszok közös végpontja.

Egyszerűsödik a helyzet, ha a területeket előjeles mennyiségeknek tekintjük a következő módon: megadjuk a határnak a körüljárási irányát (sokszögeknél pl. az egymás utáni csúcsok felsorolásával), és pozitívnak tekintjük a területet, ha a körüljárási irány az óramutató járásával ellentétes, negatívnak, ha azzal megegyező.

Könnyen látható, hogy ez esetben nem változik a mértanihely-problémában a területösszeg akkor sem, ha az egyenes mentén kilépünk a szögtartományból, s így a mértani hely egy egyenes lesz.

Bonyolódik a helyzet, ha a két szakasz párhuzamos. Ha pl. a területet mindig pozitív mennyiségnek tekintjük és a két szakasz egyenlő hosszú, továbbá a két háromszög területének összege a szakaszok meghatározta paralelogramma területének a fele, akkor a két szakasz egyenesei közti sáv összes pontja alkotja a mértani helyet. A területösszeg nem lehet kisebb ennél az értéknél.

A kérdés további elemzését az Olvasóra bízzuk.



4. ábra

III. megoldás. Jelöljük a P pontból a négyszög csúcsaihoz vezető szakaszokat és a köztük levő szögeket a, b, c, d-vel, illetőleg α, β, γ, δ-val amint a 4. ábra mutatja, és írjuk fel a feladatban szereplő négy háromszög kétszeres területének az egyenlőségét, a területet két oldallal és a köztük levő szöggel fejezve ki:

$$ab\sin\alpha = bc\sin\beta = cd\sin\gamma = da\sin\delta.$$

Innen az első és a harmadik kifejezés szorzata egyenlő a második és a negyedik szorzatával. A 0-tól különböző $abcd$ szorzatot mindkettőből elhagyhatjuk és a következő, szögek közti összefüggést kapjuk:

$$\sin\alpha\sin\gamma = \sin\beta\sin\delta.$$

Az összefüggést a

$$2\sin\varphi\sin\psi = \cos(\varphi-\psi) - \cos(\varphi+\psi)$$

azonosság alapján így alakíthatjuk át:

$$\cos(\alpha-\gamma) - \cos(\alpha+\gamma) = \cos(\beta-\delta) - \cos(\beta+\delta).$$

Tudjuk azt is, hogy a négy szög összege 360°, ezért

$$\cos(\beta+\delta) = \cos\big(-(\alpha+\gamma)\big) = \cos(\alpha+\gamma),$$

és így a két kisebbítendő is egyenlő. Az egyes szögek 180°-nál kisebb pozitív szögek, így a szögkülönbségek -180° és 180° közt vannak. Koszinuszaik tehát csak úgy lehetnek egyenlők, ha a szögek vagy egyenlők, vagy egymás ellentettjei. Az első esetben

$$\alpha-\gamma = \beta-\delta \quad \text{azaz} \quad \alpha+\delta = \beta+\gamma,$$

és mivel a négy szög összege 360°, így az egyenlőség mindkét oldalán 180° áll, azaz P a BD szakaszon van, tehát BD felezi a négyszög területét.

A második esetben

$$\alpha-\gamma = \delta-\beta \quad \text{azaz} \quad \alpha+\beta = \gamma+\delta.$$

Ekkor P az AC átlón van, és ez felezi a négyszög területét.

IV. megoldás. Megoldhatjuk a feladatot a vektoriális szorzat felhasználásával is. Jelöljük a P pontból a csúcsokhoz mutató vektorokat $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$-vel. Ekkor a feltételben szereplő négy háromszög területének egyenlőségét az

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{d} = \mathbf{d} \times \mathbf{a}$$

egyenlőségek fejezik ki. Valóban, az egyes vektorszorzatok hossza a háromszögek területének a kétszerese, és a vektorok a sík ugyanazon oldalára mutatnak, mert a P pont a négyszög belsejében van.

Képezzük az első és második, továbbá a harmadik és negyedik szorzat különbségét és használjuk fel, hogy a vektoriális szorzat a tényezők felcserélésével az ellentettjére változik, továbbá a disztributív tulajdonságát:

$$\mathbf{o} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{c} \times \mathbf{b} = (\mathbf{a} + \mathbf{c}) \times \mathbf{b};$$

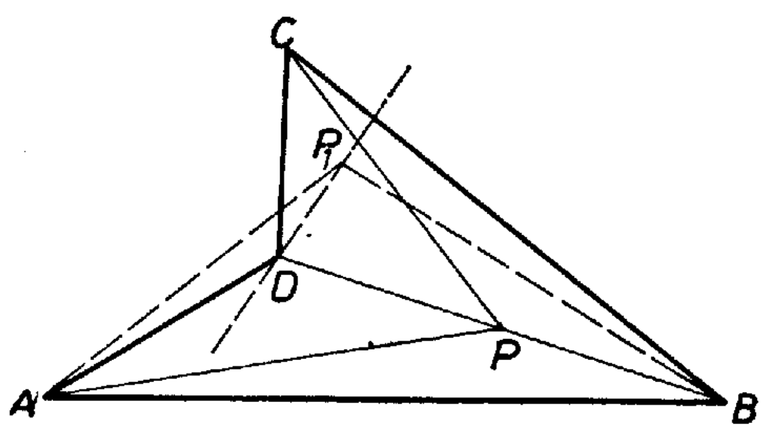
és hasonlóan kapjuk, hogy

$$\mathbf{o} = (\mathbf{c} + \mathbf{a}) \times \mathbf{d}.$$

Az először nyert szorzat csak úgy lehet a nullavektor, ha $\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{o}$, vagy $\mathbf{a} + \mathbf{c}$ és $\mathbf{b}$ párhuzamos. Az első esetben $\mathbf{c} = -\mathbf{a}$, ami azt jelenti, hogy P az AC átló felezőpontja, így ez az átló felezi a négyszög területét. Ha viszont $\mathbf{a} + \mathbf{c}$ nem $\mathbf{o}$ és párhuzamos $\mathbf{b}$-vel, akkor a második nyert összefüggésből adódik, hogy $\mathbf{d}$-vel is párhuzamos, vagyis $\mathbf{b}$ és $\mathbf{d}$ párhuzamos vektorok. Ekkor tehát P a BD átlón van, és így ez az átló felezi a négyszög területét.

Megjegyzés. Az adott négyszög konvex voltát csak annyiban használtuk fel, hogy a megoldásban szereplő vektoriális szorzatok a sík ugyanazon oldalára mutatnak. Ez azonban konkáv négyszögre is teljesül, ha a P-ből a csúcsokhoz húzott szakaszok a négyszög belsejében vannak.

Belátjuk, hogy ha konkáv négyszög belsejében van a feltételnek eleget tevő P pont, akkor az utoljára mondott feltétel teljesül rá, és így a feladat állítása a konvexitás kikötése nélkül is igaz. Valóban, ha a négyszög konkáv szöge a D csúcsnál van, akkor a $\tau_{ADP} = \tau_{CDP}$ egyenlőségből következik, hogy a DP egyenes vagy felezi az AC szakaszt, vagy párhuzamos vele. Az első esetben a PA, PB, PC, PD szakaszok a négyszög belsejében futnak. Ha viszont egy P_1 pontra az utóbbi teljesül, akkor vagy az ABP_1 háromszög, vagy a BCP_1 háromszög tartalmazza a D pontot (5. ábra), mondjuk, az előbbi eset áll fenn. Ekkor a háromszög tartalmazza az ADP_1 háromszöget is, tehát területe nagyobb, mint az utóbbié, így nem teljesülhet a P_1 pontra a feladat feltétele.



5. ábra