

I. megoldás: Van ilyen ponthalmaz és nagyon sokféleképpen lehet ilyent megadni. Egy derékszögű koordináta-rendszerben a pont koordinátáit x, y, z -vel jelölve minden sík egyenlete írható

$$ax + by + cz + d = 0$$

alakban, ahol a, b, c közt van 0-tól különböző. A ponthalmazt úgy adjuk meg, hogy minden valós t értékhez hozzárendeljük azt a pontot, amelyiknek koordinátái

$$x = f(t), y = g(t), z = h(t).$$

Az f, g, h függvényeket úgy kell választanunk, hogy az

$$af(t) + bg(t) + ch(t) + d = 0$$

egyenletnek legyen legalább egy gyöke, ha a, b, c közül legalább az egyik nem 0, de mindig csak véges sok gyöke legyen.

Kézenfekvő polinomokat választani, mert tudjuk, hogy egy polinomnak csak véges sok gyöke lehet: legfeljebb annyi, mint a foka, kivéve természetesen a 0 polinomot. Azt is tudjuk továbbá, hogy (valós együtthatós) páratlan fokú polinomnak mindig van legalább egy (valós) gyöke. Ezek alapján az $x = t^5, y = t^3, z = t$ összefüggésekkel jellemzett ponthalmaz megfelel. Ezt írhatjuk kicsit egyszerűbben

$$x = z^5, \quad y = z^3$$

alakban is. Valóban, az

$$az^5 + bz^3 + cz + d = 0$$

egyenlet a mondott feltételek mellett mindig páratlan: 5-öd-, 3-ad- vagy elsőfokú, így a ponthalmaznak minden síkkal legalább egy és legfeljebb 5 közös pontja van.

Megjegyzések. 1. Mint a megoldás is utal rá, f, g, h -nak bármilyen három különböző, páratlan fokú polinomot választhatunk. Használhatunk páros fokú polinomot is alkalmas előjel-megállapodásokkal kombinálva. Könnyű látni pl., hogy a következő ponthalmaznak:

$$z = x^3, \quad y = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \geq 0, \\ -x^2 & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

szintén van pontja minden síkon és mindegyiken csak véges számú. Belátható, hogy ennek is legfeljebb 5 pontja lehet egy síkon. Ennek igazolását az olvasóra bizzuk.

2. A megadott ponthalmazok pontjai térbeli görbét alkotnak. Az előző megjegyzésben szereplő görbéhez eljuthatunk úgy, hogy az x - és z -tengely síkjában megrajzoljuk a $z = x^3$ egyenletű görbét és tekintjük az ennek a pontjain át az y tengellyel párhuzamosan húzott egyenesek alkotta (általános) hengerfelületet; az y - és x -tengely síkjában pedig az origóban érintkező, első, ill. harmadik negyedben futó két félpárolaiból álló görbe pontjain át a z -tengellyel párhuzamosan húzott egyenesek alkotta hengerfelületet képezzük. A két felület metszésvonala adja a szóban forgó görbét (1. a, b, c ábra).

1988-02-053-1.eps

1. a ábra

1988-02-053-2.eps

1. b ábra

1988-02-054-1.eps

1. c ábra

3. Használhatók polinomok helyett más függvények is. Erre mutat példát a következő megoldás.

II. megoldás. Három térbeli görbe vonalat adunk meg, amelyek egyesítésére teljesülnek a követelmények. Ezek szemléletesen így származtathatók. Egy 2π szélességű végtelen sáv középvonala legyen az ordinátatengely. Ábrázoljuk a $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ függvényt a $-\pi < \varphi < \pi$ számközben (2. a ábra), majd hajlítsuk össze a sávot egy (egységnyi sugarú) hengerré. A henger három példányát helyezzük el úgy, hogy a tengelyük rendre az x -, y -, z -tengely legyen, a sáv $(0, 0)$ pontja pedig az y -, z -, illetve x -tengely egységpontjába kerüljön. (A 2. b ábra a harmadik henger ábrázolása.)

1988-02-054-2.eps

2. a ábra

A feltételek teljesülésének igazolásához célszerű a pontok koordinátáit formulákkal megadni. A z -tengely körüli henger egy pontja legyen P , vetülete az x, y koordinátasíkon P' , az ehhez mutató vektornak az x -tengely pozitív felével bezárt szöge φ . Ekkor az $(1, 0, 0)$ ponttól P' -ig terjedő körív hossza is φ , így a P pont koordinátái:

$$x = \cos \varphi, \quad y = \sin \varphi, \quad z = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

A másik két görbe pontjainak koordinátái:

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, & y &= \cos \varphi, & z &= \sin \varphi, & \text{ill.} \\ x &= \sin \varphi, & y &= \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, & z &= \cos \varphi; \end{aligned}$$

φ mindhárom esetben $-\pi$ és π közti szöget jelent (radiánban mérve).

Egy tetszés szerinti sík egyenlete

$$(1) \quad ax + by + cz + d = 0$$

alakú, ahol a, b, c közt van 0-tól különböző. Ennek a harmadik görbével való metszéspontjai azok a pontok, amelyek koordinátái az

$$a \cos \varphi + b \sin \varphi + c \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + d = 0$$

egyenletnek eleget tévő φ értékekhez az első egyenlethármassal meghatározott értékek.

Az egyenlet $t = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ -re vonatkozó algebrai egyenletté alakítható a következő összefüggések felhasználásával:

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \cos^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{2t}{t^2 + 1}; \\ \cos \varphi &= \frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \cos^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}. \end{aligned}$$

Ezeket beírva, a törteket eltávolítva és az egyenletet rendezve kapjuk, hogy:

$$(2) \quad ct^3 + (d - a)t^2 + 2bt + a + d = 0.$$

Ennek legfeljebb 3 megoldása van (a valós számok körében), kivéve, ha az azonosan 0 polinomról van szó, vagyis ha

$$b = c = d - a = a + d = 0.$$

Ekkor azonban a és d is 0, s így az (1) egyenlet minden (x, y, z) számhármásra teljesül, nem sík egyenlete. Mivel $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ a $-\pi < \varphi < \pi$ számközben minden valós értéket felvesz, és mindegyiket csak egyszer, így a síknak a görbével legfeljebb 3 közös pontja lehet.

Ugyanígy adódik, hogy egy síknak a másik két görbével is legfeljebb 3-3 közös pontja lehet, az egész ponthalmazzal tehát legfeljebb 9.

Az is világos, hogy minden síknak van közös pontja a halmazzal, mert ha pl. $c \neq 0$, akkor a (2) egyenlet harmadfokú és így van valós gyöke.

Megjegyzések. 1. Szemléletesen a hengert elmesztettük egy síkkal, és azt kérdezzük, hogy ha a hengerfelületet egy alkotója mentén felvágjuk és a síkba terítjük, a metszésvonal hány pontban metszi a tangensgörbe képét. Belátjuk, hogy ha a sík metszi a henger tengelyét, de nem merőleges rá, akkor a metszésvonal a síkba terítve egy szinuszvonalat ad.

Valóban, a henger egy tetszés szerinti pontjának koordinátái $x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$, z alakban írhatók, így az (1) síkkal való metszéspontokat azok a φ értékek szolgáltatják, amelyekre

$$a \cos \varphi + b \sin \varphi + cz + d = 0.$$

A síkra kimondott feltételek akkor teljesülnek, ha c , továbbá a és b közül legalább az egyik nem 0. Ekkor egyenletünk így alakítható át:

$$z = -\frac{a}{c} \cos \varphi - \frac{b}{c} \sin \varphi - \frac{d}{c} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c} \sin(\varphi - \alpha) - \frac{d}{c},$$

ahol α -t a

$$\sin \alpha = \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

összefüggések határozzák meg. Ezzel a kimondott állítást igazoltuk. A fenti meggondolás azt a szemléleti megfigyelést igazolja, hogy a két vonalnak legfeljebb 3 metszéspontja lehet.

2. Megfelelő pontthalmazok számtalan más elgondolás alapján is elkészíthetők, és merült is fel sok további példa a dolgozatokban. Többen állították azonban azt is, egyesek indokolni is próbálták, hogy a kívánt tulajdonságú pontthalmaz nem létezik.

3. A felmerült példák mindegyikében volt olyan sík, amelyik a pontthalmaznak legalább 5 pontját tartalmazta. Kézenfekvő kérdés, hogy nem adható-e meg olyan pontthalmaz, amelyiknek minden síkon 5-nél kevesebb pontja van. Nem csökkenthető ez a szám 3 alá, hiszen a halmaz bármely 3 pontján át fektethető sík. Mély halmazelméleti módszerekkel bebizonyítható, hogy létezik olyan pontthalmaz is, amelyiknek minden síkon pontosan 3 pontja van. Ez a bizonyítás azonban csupán a pontthalmaz létezését adja, előállításához vagy egyáltalán az elképzeléséhez sem ad semmilyen támpontot.

Megmutatható hogy egy folytonos vonalnak, ha kielégíti a feltételeket, mindig van 5 egy síkban lévő pontja.