

I. megoldás. Mivel a négy szám szerepe semmiben sincs kitüntetve egymáshoz képest, feltehetjük az általánosság megszorítása nélkül, hogy a a legkisebb, továbbá, hogy $c < d$, tehát

$$a < b, \quad a < c < d.$$

Nem lehet $a \geq 2$, mert akkor $c \geq 3$, és így

$$ab \geq 2b > a + b = cd \geq 3d > c + 2d = ab + d > ab$$

kellene, hogy fennálljon, de ez lehetetlen. Eszerint

$$a = 1, \quad c \geq 2 \quad \text{és} \quad d \geq c + 1,$$

tehát

$$a + b = 1 + b = cd \geq 2d \geq c + 1 + d = ab + 1 = b + 1.$$

Ez csak úgy állhat fenn, ha mindenütt az egyenlőség jele érvényes, tehát

$$c = 2, \quad d = c + 1 = 3, \quad \text{és} \quad b = cd - 1 = 5.$$

Az 1, 5 és 2, 3 számpár valóban megfelel a feltételeknek. Ezekből további 7 megfelelő számpárt kapunk, ha a párok elemeit egymás közt felcseréljük, továbbá ha a két párt megcseréljük.

II. megoldás. Alakítsuk át a feltételi egyenlőségek felhasználásával az $(a - 1)(b - 1)$ szorzatot:

$$(a - 1)(b - 1) = ab - a - b + 1 = c + d - cd + 1 = 2 - (c - 1)(d - 1),$$

azaz

$$(a - 1)(b - 1) + (c - 1)(d - 1) = 2.$$

Miután a feladat pozitív egész számokról szól, ez csak úgy állhat fenn, ha a bal oldalon vagy mindkét tag 1, vagy az egyik 0, a másik 2. Az első lehetőség egyedül az $a = b = c = d = 2$ esetben következik be. Ezekre teljesülnek a feladatban megkívtat egyenlőségek, de a számok nem különböznek.

A második eset akkor következik be, ha az egyik szám 1, mondjuk $a = 1$, amiből következik, hogy

$$(c - 1)(d - 1) = 2.$$

Feltehetjük, hogy $c < d$. Ekkor $c - 1 = 1$, $d - 1 = 2$ kell, hogy legyen, azaz $c = 2$, $d = 3$ és $b = 1 \cdot b = c + d = 5$. Ezek az értékek kielégítik a feladat összes követelményét.

III. megoldás. A feltételi egyenlőségekből következik, hogy

$$1 = \frac{a+b}{cd} \cdot \frac{c+d}{ab} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right).$$

A jobb oldalon vagy mind a két tényező 1, vagy az egyik – mondjuk az első – nagyobb, a másik kisebb, mint 1. Az első feltétel csak úgy teljesülhet, ha mindegyik tört értéke $\frac{1}{2}$, tehát $a = b = c = d = 2$, de ezek nem különböznek.

A második esetben, tehát ha

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 1,$$

nem lehet $a > 1$, mert akkor $b > 2$, s így

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 1.$$

Eszerint $a = 1$, s így $b \geq 2$, amiből következik, hogy

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad \text{tehát} \quad \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq \frac{2}{3}.$$

Nem lehet $c > 2$, mert akkor $d > 3$, s így

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{d} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} < \frac{2}{3}.$$

Eszerint $c = 2$ és a feltételi egyenletek így alakulnak:

$$b = 1 \cdot b = 2 + d, \quad 1 + b = 2d = 2b - 4,$$

tehát $b = 5$, $d = 3$. Az 1, 5; 2, 3 számpárok megfelelnek a feltételeknek.

Megjegyzés. Miután megállapítottuk, hogy $a = 1$, érdekes befejezés a következő: az

$$1 + b = cd, \quad b = c + d$$

egyenlőségekből a másodikat c -vel szorozva és az elsőt felhasználva

$$bc = c^2 + 1 + b.$$

Az egyenlőséget 4-gyel szorozva így alakítjuk át:

$$4c^2 - 4bc + b^2 + 8 = b^2 - 4b + 4, \quad \text{azaz} \quad (2c - b)^2 + 8 = (b - 2)^2.$$

A négyzetszámok közül csak az 1 és a 9 különbsége 8, tehát $|2c - b| = 1$, $|b - 2| = 3$, és innen ismét megkapjuk az előbbi két számpárt.

IV. megoldás. A feltételi egyenletekből következik, hogy

$$\frac{ab}{a+b} = \frac{c+d}{cd}.$$

Mind a két tört pozitív, s így vagy $\frac{ab}{a+b}$ is, $\frac{c+d}{cd}$ is 1, vagy az egyik, mondjuk az első, kisebb 1-nél, a második nagyobb nála. Az első esetben $ab = a + b$, amiből $(a - 1)(b - 1) = 1$, s így – pozitív egész számokról lévén szó – $a = b = 2$. Ezek azonban nem különbözők.

A második esetben $ab < a + b$, és mivel egész számokról van szó,

$$ab \leq a + b - 1, \quad \text{azaz} \quad (a - 1)(b - 1) \leq 0.$$

A bal oldal nem lehet negatív, tehát 0 az értéke, vagyis az egyik szám, mondjuk $a = 1$.

Ekkor

$$cd = 1 + b = 1 + 1 \cdot b = 1 + c + d,$$

amiből c -t kifejezve

$$c = \frac{d+1}{d-1} = 1 + \frac{2}{d-1}.$$

Mivel c egész, így d csak 2 vagy 3 lehet, c megfelelő értékei pedig 3 ill. 2. Ezzel ismét az 1, 5 és 2, 3 számpárokhoz jutottunk.