

I. megoldás. Egy ABC háromszög területét tekintsük pozitívnak vagy negatívnak aszerint, amint a háromszöget a csúcsok megadott sorrendje szerint körüljárva, az óramutató járásával ellentétes vagy azzal egyező irányban haladunk.

1986-02-053-1.eps

1. ábra

Ekkor végignézve a lehetséges eseteket (1. ábra) látjuk – a háromszögek területét ugyanúgy jelölve, mint magát a háromszöget –, hogy a háromszög síkjának egy tetszés szerinti O pontjára fennáll a következő összefüggés:

$$(1) \quad ABC = OAB + OBC + OCA.$$

Ha valamelyik három pont egy egyenesre esik, akkor a keletkező, egyenesszakasszá fajult „háromszög” területén természetesen 0-t értünk.

Feladatunkra térve legyen ABC egy tetszés szerinti háromszög pozitív körüljárásnak megfelelően betűzve. Jelöljük a csúcsok tükörképeit a velük szemközti oldal egyenesére rendre A_1 , B_1 , ill. C_1 -gyel (2. ábra).

1986-02-054-1.eps

2. ábra

Az $A_1B_1C_1$ háromszög területét az eredeti háromszögével, tükörképeivel, továbbá az A_1B_1 , B_1C_1 , C_1A_1 oldalakhoz csatlakozó egy-egy háromszög területével akarjuk kifejezni. Ehhez alkalmazzuk először (1)-et az $A_1B_1C_1$ háromszögre, O -nak az A pontot választva:

$$A_1B_1C_1 = AA_1B_1 + AB_1C_1 + AC_1A_1.$$

Alkalmazzuk most (1)-et a jobb oldal első és harmadik tagjára, O -nak C -t, ill. B -t választva:

$$\begin{aligned} AA_1B_1 &= CAA_1 + CA_1B_1 + CB_1A \\ AC_1A_1 &= BAC_1 + BC_1A_1 + BA_1A. \end{aligned}$$

Végül még a $CABA_1$ négyszöget kellene az eredeti háromszögre és tükörképére bontani. Ehhez alkalmazzuk (1)-et pl. a CAA_1 háromszögre, O -nak B -t választva:

$$CAA_1 = BCA + BAA_1 + BA_1C.$$

Adjuk össze egyenleteink bal és jobb oldalait, hagyjuk el a mind a két oldalon előforduló tagokat, továbbá a BA_1A és BAA_1 tagokat, mert ezek összege 0, hiszen ugyanannak a háromszögnek a területéről van szó egyszer pozitív, egyszer negatív előjellel. Így a következő egyenlőséghez jutottunk:

$$A_1B_1C_1 = AB_1C_1 + CA_1B_1 + CB_1A + BAC_1 + BC_1A_1 + BCA + BA_1C.$$

Itt az utolsó előtti tag az eredeti háromszög területe és vele egyenlő a harmadik, a negyedik és az utolsó tag is. Ezek ugyanis a tükrözött háromszögek területei. A tükrözés ugyan megváltoztatja a körüljárás irányát, de mindhárom esetben megfordult a betűzés sorrendje is.

Meg kell még vizsgálnunk a fennmaradt háromszögeket. Ezeknek egy-egy csúcsa közös az eredeti háromszöggel, és a körül az eredeti háromszög megfelelő szögének a háromszorosára keletkezik, de hol a háromszögön belül, hol azon kívül. Az ebből a csúcsból induló oldalak az eredeti háromszög egy-egy oldalával egyenlők. Vizsgáljuk meg közelebbről pl. az AB_1C_1 háromszöget.

Az oldalakra

$$AB_1 = AB, \quad AC_1 = AC.$$

1986-02-055-1.eps

3. ábra

A közbezárt szögre – $BAC \triangleleft = \alpha$ jelöléssel – aszerint, hogy α 0° és 60° , vagy 60° és 120° , vagy 120° és 180° közé esik, a $B_1AC_1 \triangleleft$ értéke (3. ábra) 3α , $360^\circ - 3\alpha$, ill. $3\alpha - 360^\circ$. A háromszög kétszeres területét mint két oldalnak és a közbezárt szög szinuszának a szorzatát írva, $2AB_1C_1$ abszolút értékére a három esetnek megfelelően

$$AB \cdot AC \sin 3\alpha, \quad AB \cdot AC \sin (360^\circ - 3\alpha) = -AB \cdot AC \sin 3\alpha,$$

ill.

$$AB \cdot AC \sin (3\alpha - 360^\circ) = AB \cdot AC \sin 3\alpha$$

adódik.

A háromszög körüljárási iránya viszont éppen a második esetben pozitív, az elsőben és a harmadikban negatív, így előjellel is helyesen adja meg a háromszög területét mind a három esetben a

$$2AB_1C_1 = -AB \cdot AC \sin 3\alpha$$

egyenlőség. Természetesen a megfelelő egyenlőség érvényes a másik két háromszögre. Jelöljük az eredeti háromszög területét t -vel, a tükrözéssel keletkezettét t_1 -gyel, a háromszög másik két szögét a szokott módon β -val és γ -val, akkor végül is a következő összefüggéshez jutottunk:

$$2t_1 = 8t - AB \cdot AC \sin 3\alpha - BC \cdot BA \sin 3\beta - CA \cdot CB \sin 3\gamma.$$

Azt kell belátnunk, hogy ez $-10t$ és $10t$ közé esik. Osszuk el mindkét oldalt $2t$ -vel, a jobb oldal második, harmadik és negyedik tagja esetében azt is a megfelelő két oldal és a közbezárt szög szinusza szorzataként írva, akkor a

$$\frac{2t_1}{2t} = 4 - \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin 3\beta}{\sin \beta} - \frac{\sin 3\gamma}{\sin \gamma}$$

arányról kell belátnunk, hogy -5 és 5 közötti érték.

Felhasználva a könnyen igazolható

$$\sin 3\varphi = 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi$$

azonosságot, a jobb oldal a következőképpen is írható:

$$4(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma) - 5.$$

Ebből az alsó becslés érvényessége nyilvánvaló, és az is látható, hogy az arány nem éri el a -5 értéket, de ahhoz tetszés szerint közel lehet, ha az egyik szög csak kevéssel kisebb 180° -nál, a másik kettő pedig ennek megfelelően nagyon kicsi.

Felső becsléshez alkalmazzuk 2 tagra a

$$2 \sin^2 \varphi = 1 - \cos 2\varphi,$$

majd a

$$\cos 2\varphi + \cos 2\psi = 2 \cos(\varphi + \psi) \cos(\varphi - \psi)$$

összefüggést:

$$\begin{aligned} 2 \sin^2 \alpha + 2 \sin^2 \beta &= 2 - \cos 2\alpha - \cos 2\beta = 2 - 2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \\ &= 2 + 2 \cos \gamma \cos(\alpha - \beta), \end{aligned}$$

mert $\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$. Fejezzük még ki $\sin^2 \gamma$ -t $\cos \gamma$ -val, akkor a becslendő kifejezés így alakítható tovább:

$$\begin{aligned} 4(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma) - 5 &= 3 + 4 \cos \gamma \cos(\alpha - \beta) - 4 \cos^2 \gamma = \\ &= 3 + \cos^2(\alpha - \beta) - (2 \cos \gamma \cos(\alpha - \beta))^2. \end{aligned}$$

Ez a kifejezés nem nagyobb, mint 4. Egyenlő akkor lehet vele, ha $\cos^2(\alpha - \beta) = 1$, a kivonandó pedig 0. Mivel a szereplő szögek 180° -nál kisebbek, ez azt jelenti, hogy

$$\alpha = \beta \quad \text{és} \quad \cos \gamma = \frac{1}{2}, \quad \text{azaz} \quad \gamma = 60^\circ,$$

tehát a háromszög szabályos.

Eredményeinket összefoglalva a bizonyítandó állításon kicsit túlmenően azt láttuk be, hogy a t_1 előjeles terület $-5t$ és $4t$ között változik. Az alsó határt nem éri el, de ahhoz tetszés szerint közel lehet, a felső határt viszont eléri, és pedig egyedül a szabályos háromszög esetén.

Megjegyzés. A megoldás során alkalmazott területátalakítások közt szerepelt egy négyszög területének kétféle felosztása háromszögekre is. Ennek – az $ABCD$ négyszög esetén – az felel meg, hogy (1) mindkét oldalához hozzáadjuk az ACO területet. Ez a jobb oldal utolsó tagjával 0-t ad, így

$$(2) \quad ABC + ACO = OAB + OBC.$$

1986-02-056-1.eps

4. ábra

Megjegyezzük, hogy ezzel nemcsak konvex, hanem még hurkolt négyszöghöz is rendeltünk területet (4. ábra), vagyis olyanhoz, amelyiknek az oldalai metszik egymást a csúcsoktól különböző pontban is. Ez a hozzárendelt érték a csúcsook megnevezési sorrendjében történő körüljárás során pozitív irányban körüljárt rész területéből kivonva a negatív

irányban körüljárt rész területét. A (2) összefüggés szerint ez esetben is mind a két lehetséges „felosztás” háromszögekre ugyanarra a területértékre vezet.

II. megoldás. Használjuk továbbra is az első megoldás jelöléseit. Tükrözzük a háromszög csúcsait a szemközti oldalszakaszok felezőpontjára is, a tükrösképek legyenek A_2, B_2, C_2 . Az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 egyenesek párhuzamosak rendre a háromszög BC, CA, AB oldalával, így egy ahhoz hasonló $\mathcal{H}'$ háromszöget alkotnak. Ezt a háromszöget az eredetiből úgy kaphatjuk meg, hogy azt a súlypontjából négyszeresére nagyítjuk. Valóban, ez a nagyítás az oldalfelező pontokat az A_2, B_2, C_2 -be viszi át – mivel a súlypont harmadolja a súlyvonalakat –, a háromszög oldalegyeneseit pedig párhuzamos egyenesekbe (5. ábra).

1986-02-057-1.eps

5. ábra

Az A_1A_2 szakasz megkapható úgy, hogy a BC oldal felezőpontja és a magasság talppontja közti szakaszt A -ból kétszeresére nagyítjuk. $\mathcal{H}'$ -ben viszont az A_2 oldalfelező pont és a magasságtalppont közti szakasz négyszer akkora, mint az eredeti háromszögben, tehát A_1 $\mathcal{H}'$ -ben az oldalfelező pont és a magasságtalppont közti szakasz felezőpontja.

Észrevételünket a következő egyszerű segédétel ismételt alkalmazásával fogjuk hasznosítani: Legyen az IJK háromszög síkjának tetszés szerinti pontja L , és L tükrösképe I -re M . Ekkor

$$(3) \quad IJK = \frac{1}{2}(LJK + MJK).$$

Mérjük a JK egyenestől a távolságot előjelesen úgy, hogy az I -t tartalmazó felsík pontjainak a távolsága legyen olyan előjelű, mint az IJK körüljárási irány, a másik felsíkban levő pontoké pedig ellenkező előjelű. Ekkor a háromszögek területe úgy számítható, mint a KJ távolság szorozva a hozzá tartozó magassággal, a magasságokra pedig érvényes a megfelelő összefüggés (6. ábra).

1986-02-057-2.eps

6. ábra

Jelöljük $\mathcal{H}'$ -ben az A_1, B_1, C_1 -et tartalmazó oldalakon levő magasság talppontokat rendre T_a, T_b, T_c -vel, a háromszög csúcsait pedig A_3, B_3, C_3 -mal. Ekkor, kétszer alkalmazva (3)-at

$$\begin{aligned} t_1 &= A_1B_1C_1 = \frac{1}{2}(A_2B_1C_1 + T_aB_1C_1) = \\ &= \frac{1}{4}(A_2B_2C_1 + A_2T_bC_1 + T_aB_2C_1 + T_aT_bC_1). \end{aligned}$$

Itt $A_2B_2C_1 = A_2B_2C_2$, mert C_1C_2 párhuzamos A_2B_2 -vel, az utóbbi háromszög pedig az ABC háromszög kétszeres nagyítása, területe tehát $4t$. A többi háromszöget (3) alapján tovább bontva

$$t_1 = t + \frac{1}{8}(A_2T_bC_2 + A_2T_bT_c + T_aB_2C_2 + T_aB_2T_c + T_aT_bC_2 + T_aT_bT_c).$$

Itt az első és a harmadik tag ismét $A_2B_2C_2$ -vel egyenlő, mert $T_bB_2 \parallel A_2C_2$ és $T_aA_2 \parallel B_2C_2$. Az utolsó tag a háromszög talpponti háromszögének területe, ez az eredeti háromszög t_0 talpponti háromszöge területének 16-szorosa. A maradék három háromszög egy-egy csúcsa oldalfelezőpont, így ezeket tovább alakíthatjuk (3) alapján:

$$t_1 = 2t + 2t_0 + \frac{1}{16}(B_3T_bT_c + C_3T_bT_c + T_aC_3T_c + T_aA_3T_c + T_aT_bA_3 + T_aT_bB_3).$$

A zárójel első és utolsó tagja, továbbá a maradék két-két szomszédos tagpár egy-egy négyszög területét adja. Ezeket (2) alapján a másik átlójukkal osztva ketté,

$$\begin{aligned} B_3T_aT_b + B_3T_bT_c &= T_cB_3T_a + T_cT_aT_b, \\ C_3T_bT_c + C_3T_cT_a &= T_aC_3T_b + T_aT_bT_c, \\ A_3T_cT_a + A_3T_aT_b &= T_bA_3T_c + T_bT_cT_a. \end{aligned}$$

A bal oldalak összege a zárójel 6 tagját adja, a jobb oldalak első oszlopa és egyszer a talpponti háromszög pedig $\mathcal{H}'$ -t, aminek a területe $16t$. Kétszer $\mathcal{H}'$ talpponti háromszögéé $32t_0$, így végül a következő összefüggést kaptuk:

$$t_1 = 3t + 4t_0.$$

Az ABC háromszöget pozitív körüljárás szerint betűztük meg, a talpponti háromszög körüljárási iránya azonban hegyesszögű háromszög esetén pozitív, tompaszögű háromszögnél viszont negatív.¹ Azt kell tehát belátnunk, hogy t_0 értéke $t/2$ és $-2t$ közé esik.

¹ A derékszögű háromszögnél két magasságtalppont egybeesik a derékszögű csúcsban, így $t_0 = 0$, tehát ezekre t_1 mindig $3t$, amit könnyű közvetlenül belátni. (Ez a tény vezetett egyébként a feladathoz.)

Hegyeszögű ABC háromszögnek legyen az A -nál levő szöge a legnagyobb vagy a legnagyobbak egyike. A BC , CA , AB oldalakon levő magasságtalppont legyen rendre T_1 , T_2 , T_3 . A T_1 -en át AB -vel és AC -vel húzott párhuzamosok a T_1DAE paralelogrammát metszik ki a háromszögből (7. ábra). Ez tartalmazza a talpponti háromszöget. Ez azért igaz, mert ABT_1T_2 és ACT_1T_3 húrnégyszög, s így mindkettő T_1 -nél levő külső szöge a BAC $\angle$ -gel egyenlő, a két párhuzamos tehát az egyiknek, ill. a másiknak a szögteréhez tartozik. Ekkor azonban T_2 az AD , T_3 az AE szakaszon van.

1986-02-058-1.eps

7. ábra

Legyen $T_1 \leq T_1B$. Ekkor mérjük rá DT_1 meghosszabbítására a vele egyenlő T_1F szakaszt. Az F -en át T_1E -vel párhuzamosan húzott egyenes messe AB -t G -ben. Az $ADFG$ paralelogrammának a háromszögon túlnyúló része egybevágó a T_1CD háromszöggel, így a paralelogramma területe nem nagyobb a háromszögénél. A T_1DAE paralelogramma és az általa tartalmazott talpponti háromszög területe tehát nem nagyobb, mint $t/2$.

Ha az ABC háromszögben A -nál tompaszög van, akkor a talpponti háromszög $T_1T_2T_3$ sorrendben történő körüljárása ellenkező irányú, mint az ABC háromszögé. (8. ábra).

1986-02-058-2.eps

8. ábra

A terület abszolút értékét nézve a T_2AT_3 háromszög hasonló BAC -hez és kisebb nála, mert az utóbbinak az egyik oldala a kör átmérője. Az AT_2T_1 , AT_3T_1 háromszögek területe kisebb a velük közös oldalú ABT_1 , ill. ACT_1 háromszögekénél, mert a közös oldalhoz tartozó magasságok az utóbbi háromszögekben nagyobbak. Ebben az esetben tehát a talpponti háromszög területe kisebb a háromszög területének kétszeresénél. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. Ez a megoldás is szolgáltatja az I. megoldásban nyert pontosabb eredményt. Egy paralelogrammába írt háromszög területe ugyanis nem nagyobb, mint a paralelogramma területének a fele és akkora csak úgy lehet, ha a háromszög két csúcsa a paralelogramma két szomszédos csúcsa, a harmadik csúcs pedig az ezek közti oldallal szemközti oldalon van. Ebből következik, hogy hegyesszögű háromszög talpponti háromszögének a területe nem nagyobb a háromszög területének a negyedénél, és könnyen látható, hogy egyenlő egyedül a szabályos háromszög esetén lesz.

Tompaszögű háromszög esetében viszont látható a bizonyításból, hogy a talpponti háromszög területe közel lehet $2t$ -hez, ha T_2 és T_3 közel van B -hez, ill. C -hez, de azt nem érheti el.

2. Megoldhatjuk a feladatot koordináta geometria segítségével is. Választhatjuk pl. a BC oldal egyenesét X -tengelynek és az A -ból rábocsátott merőlegest Y -tengelynek. Célszerű továbbá a B -ből és C -ből induló magasságok talppontjai koordinátaival fejezni ki B és C tükörképét. Ezúton eljuthatunk akár az I., akár a II. megoldásban nyert területformulához.

3. Azok számára, akik ismerik a vektorok vektoriális szorzatát, válaszunk egy ezt felhasználó megoldást. A $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ vektor vektoriális szorzatán, $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ -n azt a vektort értjük a térben, amelyiknek hossza a vektorok meghatározta paralelogramma területe, iránya merőleges a két vektor síkjára és annak arra az oldalára mutat, amelyikről nézve $\mathbf{v}_1$ pozitív irányban forgatható 180° -nál kisebb szöggel $\mathbf{v}_2$ -be. Ez a művelet nem kommutatív, hiszen a tényezőik felcserélésével előjelet vált. Előjelet vált a szorzat akkor is, ha az egyik vektort az ellentettjével helyettesítjük. Ennek megfelelően, ha mindkét vektor előjelét megváltoztatjuk, vagy az egyik előjelét változtatjuk és a tényezőket megcseréljük, akkor a vektoriális szorzat értéke nem változik. Azt kell még tudni róla, hogy disztributív:

$$\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3 \quad \text{és} \quad (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) \times \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1.$$

Az $A_1B_1C_1$ háromszög kétszeres területét az $\overrightarrow{A_1B_1} \times \overrightarrow{A_1C_1}$ szorzat adja. A tényezőket így határozhatjuk meg:

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{CB_1} - \overrightarrow{CA_1} = 2(\overrightarrow{CT_2} - \overrightarrow{CT_1}) + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{T_1T_2} + \overrightarrow{BA},$$

mert pl. $\overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CT_1}$ (9. ábra).

1986-02-059-1.eps

9. ábra

Hasonlóan $\overrightarrow{A_1C_1} = 2\overrightarrow{T_1T_3} + \overrightarrow{CA}$, és így a kettőt tagonként összeszorozva $2t_1$ -et a következő vektorok előjeles hosszának összege adja – az $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ -vel egy irányba mutató vektorok hosszát tekintve pozitívnak, az azzal ellentétes irányúakét negatívnak –

$$4\overrightarrow{T_1T_2} \times \overrightarrow{T_1T_3} + 2\overrightarrow{T_1T_2} \times \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{T_1T_3} + \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{CA}.$$

Az első tag $8t_0$, az utolsó $2t$. A közbülső kettőben az oldalt a rajta levő talpponttal osztva a

$$\overrightarrow{T_1T_2} \times \overrightarrow{CT_2} + \overrightarrow{T_1T_2} \times \overrightarrow{T_2A} + \overrightarrow{BT_3} \times \overrightarrow{T_1T_3} + \overrightarrow{T_3A} \times \overrightarrow{T_1T_3}$$

összeg kétszeresét kapjuk. Az összeg egyes tagjai a T_2T_1C , T_2AT_1 , T_3BT_1 , T_3T_1A háromszögek kétszeres területét adják, ezeknek az összege pedig az ABC háromszög területe (10. ábra). Ezeket figyelembe véve a $t_1 = 4t_0 + 3t$ formulához jutunk.

A koordinátákkal felírható területformula tagjait alkalmasan csoportosítva ugyanezeknek a háromszögeknek a területeit ismerhetjük fel.

4. Volt, aki az A_1B_1 , B_1C_1 , C_1A_1 oldalak négyzetét fejezte ki az oldalakkal, és a szögek háromszorosaival, és helyettesítette be a Heron-formulába. Ezen az úton is el lehet jutni – elég fáradságosan – az I. megoldás formulájához.