I. megoldás. A feladat állítását teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n=2$, akkor a $P_0P_1P_2$ háromszöget kell az 1 számmal megszámozni, és ez lehetséges, mégpedig egyféleképpen.

Tegyük most fel, hogy $n=(k-1)$-re igaz a tétel, vagyis egy háromszögekre bontott, konvex k-szög háromszögeit meg lehet számozni a kívánt módon. Legyen $P_0P_1\dots P_k$ egy konvex $(k+1)$-szög, amelyiket egymást nem metsző átlók háromszögekre bontanak. Hagyjuk el a P_k csúcsot, és a belőle induló P_kP_j szakaszok helyett húzzuk meg a $P_{k-1}P_j$ szakaszokat. Ezzel a $P_0P_1\dots P_{k-1}$ sokszög egy felosztását kaptuk átlók útján. Ezek az átlók sem metszhetik egymást, mert azok az átlók, amelyek az eredeti sokszögben is meg voltak húzva, nem metszik egymást, egy olyan $P_{k-1}P_j$ átló pedig, amelyik egy P_kP_j átló helyébe lépett, csak olyan átlót metszhetne át, amelyiknek egyik végpontja P_{k-1} és P_k közt van, ide azonban nem esik csúcsa egyik sokszögnek sem.

Az új átlók a $(k-1)$-szöget háromszögekre bontják. Az eredeti sokszögnek azok a részháromszögei ugyanis, amelyeknek nem csúcsa P_k, szerepelnek a $(k-1)$-szög felbontásában is. Az eredeti sokszögben van egy $P_jP_{k-1}P_k$ háromszög, ezt összehúztuk a $P_{k-1}P_j$ átlóra, a $P_iP_jP_k$ háromszögek helyébe pedig, ha $i<j<k-1$, a $P_iP_jP_{k-1}$ háromszögek lépnek. Ezek együtt hézag és átfedés nélkül kitöltik a $P_0P_1\dots P_{k-1}$ sokszöget. Ezek a háromszögek az indukciós feltevés szerint megszámozhatók a kívánt módon az 1, 2, …, $k-2$ számokkal.

Ezután a k-szög felbontásában azok a háromszögek, amelyek a $(k-1)$-szög felbontásában is szerepelnek, tartsák meg sorszámukat. Ha $i<j<k-1$, és ha a $P_iP_jP_k$ háromszög fellép, akkor kapja azt a sorszámot, amit a k-szög felbontásában a $P_iP_jP_{k-1}$ háromszög kapott *(ez i vagy j).* Végül a $P_jP_{k-1}P_k$ háromszögnek a $k-1$ sorszám jut. Világos, hogy így minden háromszögnek van a sorszámával egyező indexű csúcsa. A $(k+1)$-szög háromszögei is megszámozhatók tehát a kívánt módon.

Megjegyzések. 1. A bizonyítás menetét követve az is belátható, hogy mindig csak egyféleképpen végezhető el a háromszögek megszámozása a követelményeknek megfelelően.

2. Abból a feltételből, hogy egy konvex m-szöget egymást nem metsző átlók háromszögekre bontanak, következik, hogy $m-3$ átlóval $m-2$ háromszögre van felosztva a sokszög. Valóban, minden átló meghúzása 1-gyel növeli a részsokszögek számát, a részsokszögek oldalainak együttes száma pedig 2-vel szaporodik, mert a korábbi oldalakon kívül a meghúzott átló is oldala lesz két sokszögnek. Ha tehát k átló meghúzása után csupa háromszög keletkezett, akkor egyfelől $k-1$ háromszög keletkezett $3k+3$ oldallal, másfelől a keletkezett részsokszögek oldalainak együttes száma $m+2k$. Ebből következik állításunk. Ezeknek a részadatoknak a kiszámítása azonban fölöslegesen terhelte volna a megoldásra rendelkezésre álló időt.

3. Más lehetőségek is kínálkoztak indukciós bizonyításra. Ezeket csak röviden jelezzük.

a) Fogalmazzuk az indukciós feltételt úgy, hogy a k-nál kisebb n-ekre igaz az állítás. Egy $(k+1)$-szög felbontásában szerepel egy $P_0P_jP_k$ háromszög. Ennek a j sorszámot kell kapnia. Maradt két k-nál nem több oldalú sokszög, vagy esetleg csak egy, ezeknek a háromszögeit az indukciós feltevés felhasználásával meg tudjuk a kívánt módon számozni.

b) Könnyen látható, hogy P_0 és P_n legalább egyikéből indul ki átló. Egy ilyennel két részsokszögre bontva, azok részháromszögei az indukciós feltétel felhasználásával megszámozhatók a kívánt módon.

c) Többen azt bizonyították be, hogy van legalább két olyan csúcs, amelyikből nem indul ki átló. Ennél valamivel többet is állíthatunk. Egy ilyen „átlómentes” csúccsal szomszédos csúcsokat átlónak kell összekötnie, ha a sokszög háromszögekre van bontva (amiből következik az is, hogy két szomszédos csúcs nem lehet egyszerre átlómentes). Nevezzük a keletkező háromszöget szélsőnek és jelöljük a szélső háromszögek számát s-sel. Ezeknek két oldala sokszögoldal, a harmadik átló. Lesz $n+1-2s$ olyan háromszög, amelyiknek egy oldala sokszögoldal, kettő átló, és lehetnek olyan háromszögek is, amelyeknek mindegyik oldala átló. Az utóbbiak számát jelöljük b-vel Ekkor

$$3b+2(n+1-2s)+s=2(n+1)-3(s-b)$$

az átlók kétszeres számát adja, vagyis $(2n-4)$-et. Innen

$$s=(b+2)$$

adódik, vagyis a szélső háromszögek száma 2-vel nagyobb a „belső” háromszögekénél, tehát legalább 2.

Két szélső háromszög „középső” (átlómentes) csúcsa közül legalább az egyik különbözik P_0-tól is, P_n-től is. Egy ilyen háromszög csak a középső csúcs sorszámát kaphatja. Egy ilyen háromszöget elhagyva a maradó sokszög háromszögeit meg tudjuk számozni az indukciós feltétel alapján a kívánt módon.

Adhatunk közvetlen utasítást is a háromszögek megszámozására.

II. megoldás. Adjuk a felosztásban szereplő $P_iP_jP_k$ háromszögnek, ha $i<j<k$, a j számot. Ezzel minden háromszög kapott számot. Az is világos, hogy mindegyiknek a száma legalább 1 és legfeljebb $n-1$. Elég tehát még azt belátni, hogy két háromszög nem kaphatta ugyanazt a sorszámot.

Ha a fenti $P_iP_jP_k$ háromszögön kívül még valamelyiknek csúcsa P_j, akkor ennek nem lehet csúcsa a sokszög kerületének P_k-tól P_0-on át P_i-ig menő részén, mert az azt P_j-vel összekötő átló metszené P_iP_k-t. Nem lehet egy ilyen háromszögnek egy csúcsa a kerület P_iP_j részén, egy pedig a P_jP_k részen, mert az ezeket összekötő átló metszené P_iP_j-t is, P_jP_k-t is. Ekkor azonban P_j a kérdéses háromszögnek vagy legkisebb indexű csúcsa, vagy a legnagyobb indexű, s így a háromszög j-től különböző sorszámot kap. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Megjegyzés. A feladat állítása igaz marad akkor is, ha tetszés szerinti sorrendben írjuk a csúcsok mellé a $0,1,\dots,n$ sorszámokat. Ha egy ilyen sorszámozás mellett P_0 és P_n szomszédosak, akkor könnyen látható, hogy az állítás nem lényegesen más, mint az eredeti. Tegyük tehát fel, hogy nem szomszédosak. Ismét teljes indukcióval bizonyítunk.

Ha $n = 3$, akkor P_0 és P_3 átellenes csúcsok. Ha a négyszög a P_0P_3 átlóval van kettéosztva, akkor nyilván a $P_0P_1P_3$ háromszögnek kell az 1 számot kapnia, a másiknak a 2-t. Ha viszont a P_1P_2 átló van meghúzva, akkor bármelyik háromszög kaphatja az 1-et és a másik a 2-t.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz a legfeljebb k oldalú sokszögekre és legyenek egy háromszögekre bontott $(k+1)$-szög csúcsai tetszés szerinti sorrendben $P_0, P_1, \ldots, P_k$-val jelölve, de P_0 és P_k ne legyen szomszédos. Ha P_0P_k szerepel az átlók között, akkor ez két olyan sokszögre osztja a $(k+1)$-szöget, amelyek külön-külön eleget tesznek a feladat feltételeinek (csak itt már két szomszédos csúcs az, amelyeknek az indexét nem használhatjuk fel a háromszögek számozásánál), ezek háromszögei tehát megszámozhatók az indukciós feltevés szerint a kívánt módon. Ha a P_0P_k átló nincs meghúzva, akkor legyen P_i és P_j a legközelebbi csúcs P_k két oldalán, amelyik össze van kötve P_0-val. Mivel a sokszög háromszögekre van bontva, a P_iP_j átlónak szerepelnie kell a kijelölt átlók közt. Vágjuk ketté ezzel a $(k+1)$-szöget, és a P_0-t tartalmazó sokszögben zárjuk még ki az i-t, a P_k-t tartalmazó sokszögben a j-t a háromszögek számozására megengedett értékek közül. Ekkor a részsokszögek háromszögei megszámozhatók az indukciós feltétel szerint a kívánt módon, és ez a számozás megfelelő lesz a $(k+1)$-szögre is, mivel a P_0-t tartalmazó sokszögben j-t, a P_k-t tartalmazóban pedig i-t felhasználtuk számozásra.