I. megoldás. Ha a feladatban leírt felület síkba hajtogatható, pl. az $A_1A_2B_1$ háromszög síkjába, akkor a többi háromszög ezt a háromszöget tartalmazó háromszögrács egy-egy háromszögét fogja fedni. Ha a hajtogatás sikerült, akkor vágjuk fel az összehajtogatott felületet az A_1B_1 él mentén és hajtogassunk tovább, amíg az összes többszörös fedést meg nem szüntetjük. Így egy paralelogrammához jutunk. Ez utóbbi hajtogatások a síknak a rács egy-egy egyenesére való tükrözésével valósíthatók meg. Rajzoljuk meg azt a két szabályos hatszöget, amelyiknek egyik oldala A_1B_1 és az ehhez csatlakozó hatszögrácsot a síkban (4. ábra).

1985-02-055-1.eps

4. ábra

Figyeljük meg, hogy bármelyik tükrözésnél ez a hatszögrács önmagába megy át, tehát a kiterítés után az A_1B_1 él másodszori képe is hatszögoldalra, sőt párhuzamos hatszögoldalra kellene hogy kerüljön. A sávba eső párhuzamos hatszögoldalak közt azonban 6-6 szabályos háromszög van, 28 pedig nem osztható 6-tal, tehát a keletkező felület nem lehet síkba hajtogatható.

II. megoldás. Az egyes háromszögek A_iA_{i+1}, ill. B_iB_{i+1} oldallal párhuzamos középvonalai zárt törtvonalat alkotnak a térben. Síkba hajtogatva ezek továbbra is zárt törtvonalat alkotnak, tehát mint vektoroknak – alkalmasan irányítva – az összegük a nulla-vektor. Két egymás utáni vektornak az iránya vagy megegyezik, vagy, ha a köztük levő él mentén hajtogatás történt, egyik vagy másik irányban 120°-ot zárnak be egymással (5. ábra).

1985-02-055-2.eps

5. ábra

A zárt törtvonal egyes szakaszai tehát az egymással 120°-ot bezáró és egyenlő hosszú **a, b** vagy **c** vektorral egyenlők. Legyen r az **a** vektorok száma, s a **b**-ké, t a **c**-ké, akkor tudjuk, hogy

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}, \quad r\mathbf{a}+s\mathbf{b}+t\mathbf{c}=\mathbf{0}, \quad r+s+t=28.$$

Az első két egyenletből pl. **c**-t kiküszöbölve és átrendezve az

$$(r-t)\mathbf{a}=(t-s)\mathbf{b}$$

egyenlethez jutunk. Mivel **a** és **b** nem párhuzamos, ez csak úgy lehet, hogy

$$r-t=t-s=0, \quad \text{azaz} \quad r=s=t,$$
$$\text{s így } 3r=28$$

a harmadik egyenletből. Ez azonban nem lehet, mert r' egész szám. A felület tehát nem hajtogatható egy síkba.

III. megoldás. Ha a feladatban szereplő felület síkba hajtogatható, akkor síkba kiterített hálója is (6. ábra) összehajtogatható úgy, hogy a két A_1, ill. B_1 pont egymásra kerüljön.

1985-02-056-1.eps

6. ábra

Minden hajtásnál a háló háromszögei a hálót tartalmazó háromszögrács egy-egy háromszögébe mennek át. Színezzük az A_1, B_1, A_2 csúcsokat sorra pirosra, sárgára és kékre. Ekkor folytathatjuk a színezést a három színnel úgy, hogy az egész háló és az egész azt tartalmazó síksáv háromszögeinek a csúcsai különböző színűek legyenek. Az A_1, A_2, … pontok sorozata periodikusan ismétlődve piros, kék, sárga színű lesz, a B_1, B_2, … pontok pedig sárga, piros, kék színűek. Ezután tükrözve az A-k, ill. B-k egyenesére, majd sorra a keletkező újabb határvonalakra az egész háromszögrács összes csúcsainak olyan színezését kapjuk három színnel, amelynél minden háromszög csúcsai különböző színűek. Ha most a rács bármelyik egyenesére tükrözünk, minden csúcs ugyanolyan színű csúcsba megy át. Ahhoz tehát, hogy a kívánt hajtogatás lehetséges legyen, a két A_1-gyel jelzett csúcsnak egyszínűnek kellene lennie, azonban az egyik piros, a másik sárga. A kívánt hajtogatás tehát nem lehetséges.

IV. megoldás. Vizsgáljuk az $A_1B_1A_2B_2A_3\ldots A_{14}B_{14}A_1$ zárt törtvonalat. Ennek két-két szomszédos szakasza mindig egy háromszöglap két éle, tehát 60°-ot zár be. A felület háromszögei a sík egy szabályos háromszögrácsának a háromszögeibe kerülhetnek csak.

1985-02-056-2.eps

7. ábra

Jelöljünk meg egy csúcsot, ahová A_1 kerül (7. ábra). Ekkor B_1 annak a szabályos hatszögnek egyik csúcsába kerül, amelyiknek a megjelölt csúcs a középpontja, A_2 pedig valamelyik szomszédos csúcsába, mert a szomszédos szakaszok 60°-ot zárnak be. B_2 ezután vagy újra a megjelölt csúcsba kerül, vagy annak a hatszög valamelyik oldalára vonatkozó tükörképébe. Jelöljük meg ezeket is. Az eljárás most már ismételhető. A következő két pont ismét egy megjelölt pont körüli szabályos hatszög két szomszédos csúcsába kerül, a harmadik vagy egy már megjelölt pontba kerül, vagy egy ilyennek a körülötte levő hatszög valamelyik oldalára vonatkozó tükörképébe. Jelöljük meg ezeket is. Ilyen módon minden harmadik szakasz végpontja kerül megjelölt pontba, tehát pl. a 27. szakasz végpontja. Ekkor azonban a 28. szakasz végpontja nem kerülhet A_1-be. A kívánt hajtogatás tehát nem lehetséges.

Megjegyzések. 1. Láttuk, hogy ahhoz, hogy, a keletkező felület síkba hajtogatható legyen, a háromszögek számának oszthatónak kell lennie 6-tal. Többen állították, hogy ez elegendő is. Ez így már csak azért sem igaz, mert a 6 háromszögből álló felület egy oktaéder, amelyiknek két szemközti lapját eltávolítottuk, és ez merev a két lap eltávolítása után is (8. ábra).

1985-02-057-1.eps

8. ábra

Arra is gondolni kell, hogy a felületnek a feladatbeli leírása (most már 28 helyett $6k$ darab háromszöggel, ahol k legalább 2) nem egyértelmű, hiszen elkészítve a hálót, a két A_1B_1 él összeragasztása előtt még meg is csavarhatjuk, akár többször is. A 9. és 10. ábra egy-egy síkba hajtogatott, $6k$ háromszögből álló szalagot mutat, és alatta – hajlékony anyagból képzelve el őket – térben is szemléltettük alakjukat.

1985-02-057-2.eps

9. ábra

1985-02-057-3.eps

10. ábra

Az már kérdéses, hogy a síkbeli zárt karika 3-dimenziós felületté hajtogatható-e csak a megengedett élek menti hajtogatással. Az, hogy ez nem magától értetődő, látható abból is, hogy az oktaéder-felületnek megfelelő szalag is megvalósítható a síkban. A jobb elképzelés kedvéért két részben rajzoltuk meg a felületet.

1985-02-058-1.eps

11. ábra

A 11. ábra két rombusza fölé kell hajtani a hozzájuk csatlakozó háromszöget, majd az I rombuszt a II-re helyezni és az egyformán jelölt (és betűzött) éleket összeragasztani. Ha ez 3-dimenziós felületté volna hajtogatható a háromszögek hajlítása nélkül, akkor megfordítva, az oktaéder-felület is síkba volna hajtogatható, de az, mint említettük, merev. Még meglepőbb eredményre jutunk, ha az I rombuszhoz csatlakozó háromszöget a rombusz alá hajtjuk, úgy helyezzük egymásra a két rombuszt és ragasztjuk össze az egymásnak megfelelő éleket. Így egy megcsavart szalagot kapunk síkba hajtogatva (12. ábra). Ennek megfelelő 3-dimenziós felület merev háromszögekből egyáltalán nem készíthető.

1985-02-058-2.eps

12. ábra

2. Többen állították, hogy a $3k$ háromszögből álló szalag is síkba hajtogatható, ha $k \geq 2$. Ez az állítás már azért is kétes értékű, mert a feladat szövege páros számú háromszögre utal. Megtehetjük azonban, hogy pl. eggyel kevesebb B pontot veszünk, mint A-t. Így már páratlan számú háromszög keletkezik. Ekkor azonban a IV. megoldásra gondolva az ott szereplő élsorozat kijelölt ponttól kijelölt pontig menő három-három éle egy A pontból egy B pontba vezet vagy fordítva. Ha tehát páratlan számú élhármasunk van, akkor az csak úgy zárulhat, ha A_1-ből B_1-be vezet. A szalagot tehát úgy kell zárnunk, hogy a kezdő A_1B_1 élet a záró B_1A_1 éllel ragasztjuk össze. Ilyen módon úgynevezett Möbius-szalagot kapunk, amelyiknek csak egy határvonala és egy oldala van. Ilyen síkba hajtogatott szalag $6k+3$ háromszögből mindig készíthető, ha $k \geq 1$ (13. ábra).

1985-02-058-3.eps

13. ábra

Megjegyzendő, hogy azok a versenyzők, akik akár az 1., akár a 2. megjegyzésben szereplő állítást megfogalmazták, igazolásukra nem tettek kísérletet.