I. megoldás. A polinomnak valós 0-helye csak negatív szám lehet, mert nem negatív x helyen egy tag sem negatív és az állandó tag 1, és így

$$f(x) \geq 1 \quad \text{ha} \quad x \geq 0.$$

Feltétel szerint n valós gyök van, jelöljük ezeket $-\alpha_1$, $-\alpha_2$, …, $-\alpha_n$-nel. Itt tehát az α_i-k pozitív számok. Az egyenlet gyökei és együtthatói közti összefüggések szerint $j = 1, 2, \ldots, n-1$-re

$$a_j = (-1)^j \big((-\alpha_1)(-\alpha_2)\ldots(-\alpha_j) + \ldots + (-\alpha_{m_1})(-\alpha_{m_2})\ldots(\alpha_{m_j}) + \ldots + \\ + (-\alpha_{n-j+1})(-\alpha_{n-j+2})\ldots(-\alpha_n)\big) = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_j + \ldots + \\ + \alpha_{m_1}\alpha_{m_2}\ldots\alpha_{m_j} + \ldots + \alpha_{n-j+1}\alpha_{n-j+2}\ldots\alpha_n,$$

végül

(1) $$(-1)^n(-\alpha_1)(-\alpha_2)\ldots(-\alpha_n) = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n = 1.$$

Az a_j-t előállító összeg mindazokból a tagokból áll, amelyek úgy keletkeznek, hogy kiválasztunk a gyökök közül j darabot és azokat összeszorozzuk. Ezek száma $\binom{n}{j}$.

Alkalmazzuk az összegre a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget. A tagok szorzatában minden α_i szerepelni fog, éspedig ugyanazon az A hatványon (ahányféleképpen a maradó $n-1$ gyök közül $j-1$-et kiválaszthatunk α_i mellé, azaz $A = \binom{n-1}{j-1}$), tehát ez a szorzat, felhasználva (1)-et

$$(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)^A = 1.$$

Így a tagok mértani közepe is 1, tehát az említett egyenlőtlenség szerint

$$\frac{a_j}{\binom{n}{j}} \geq 1 \quad \text{vagyis} \quad a_j \geq \binom{n}{j} \quad (1 \leq j \leq n-1).$$

Ezt minden együtthatóra alkalmazva, azt kapjuk, hogy

$$f(2) \geq 2^n + \binom{n}{1}2^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-1}2 + 1 = (2+1)^n = 3^n,$$

és ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzés. A megoldás azt is adja, hogy ha c nem negatív szám, akkor

$$f(c) \geq c^n + \binom{n}{1}c^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-1}c + 1 = (c+1)^n.$$

II. megoldás. Ismeretes, hogy ha egy

$$g(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n$$

polinomnak gyökei a c_1, …, c_k számok, akkor ilyen alakban írható:

$$g(x) = (x-c_1)\ldots(x-c_k)g_1(x),$$

ahol g_1 egy $(n-k)$-adfokú polinom, amelyikben a legmagasabb fokú tag együtthatója b_0. Az előző megoldás jelöléseit használva esetünkben

$$f(x) = (x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\ldots(x+\alpha_n).$$

Ide x helyett 2-t helyettesítve alkalmazzuk minden tényezőre a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget a következő alakban:

$$2+\alpha_m = (1+1+\alpha_m) = 3\cdot\frac{1+1+\alpha_m}{3} \geq 3\sqrt[3]{1\cdot 1\cdot \alpha_m} = 3\sqrt[3]{\alpha_m}.$$

Ezt $m = 1, 2, \ldots, n$-re összeszorozva és figyelembe véve (1)-et, azt kapjuk, hogy

$$f(2) \geq 3^n\sqrt[3]{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = 3^n.$$

Megjegyzés. Ez az eljárás az előző megoldáshoz fűzött megjegyzés általánosítását közvetlenül csak pozitív egész c-re adja. Érvényes azonban a felhasznált egyenlőtlenség következő általánosítása, ún. súlyozott alakja: Ha p és q pozitív számok (súlyok), és b_1, b_2 pozitív számok, akkor

(2) $$\frac{pb_1 + qb_2}{p+q} \geq \left(b_1^p b_2^q\right)^{\frac{1}{p+q}}$$

és az egyenlőtlenség értelemszerű megfelelője 2-nél több számra. Ezt $p = c$, $q = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = \alpha_m$ választással alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$c + \alpha_m = (c+1)\frac{c \cdot 1 + 1 \cdot \alpha_m}{c+1} \geq (c+1)(1^c \cdot \alpha_m^1)^{\frac{1}{c+1}} = (c+1)(\alpha_m)^{\frac{1}{c+1}}$$

és így, (1)-et is felhasználva

$$f(c) \geq (c+1)^n(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_n)^{\frac{1}{c+1}} = (c+1)^n.$$

A (2) alatti egyenlőtlenség – és általánosítása is – racionális súlyok esetén egyszerűen visszavezethető a súlyok nélküli egyenlőtlenségre; ha pedig a súlyok közt van irracionális szám is, akkor a bizonyítás úgy történik, hogy az irracionális súlyokat megközelítjük racionális számokkal, és vizsgáljuk, mi történik, ha a megközelítést minden határon túl finomítjuk.

III. megoldás. Általánosan azt bizonyítjuk, hogy tetszés szerinti pozitív c-re

$$f(c) \geq (c+1)^n.$$

Ismét a gyöktényezők szorzatára bontott alakból adódó

$$f(c) = (c+\alpha_1)(c+\alpha_2)\ldots(c+\alpha_n)$$

szorzatot vizsgáljuk. Ha itt az α_i-k mind egyenlők, akkor (1) miatt mindegyik értéke 1 és

$$f(c) = (c+1)^n.$$

Ha az α_i-k közt vannak különbözők, akkor van 1-nél kisebb is, nagyobb is. A számok sorrendjét megváltoztatva, ha kell, feltehetjük, hogy $\alpha_{n-1} < 1 < \alpha_n$. Hasonlítsuk össze ekkor $f(c)$-t az $\alpha_m^* = \alpha_m$, ha $1 \leq m \leq n-2$, $\alpha_{n-1}^* = \alpha_{n-1}\alpha_n$, $\alpha_n^* = 1$ szám n-eshez tartozó

$$f^*(c) = (c+\alpha_1^*)(c+\alpha_2^*)\ldots(c+\alpha_n^*) = (c+\alpha_1)\ldots(c+\alpha_{n-2})(c+\alpha_{n-1}\alpha_n)(c+1)$$

szorzattal. Erre is teljesül, hogy

$$\alpha_1^*\alpha_2^*\ldots\alpha_n^* = 1;$$

továbbá

$$f(c) - f^*(c) = (c+\alpha_1)\ldots(c+\alpha_{n-2})\big((c+\alpha_{n-1})(c+\alpha_n) - (c+\alpha_{n-1}\alpha_n)(c+1)\big)$$

Az utolsó tényezőt így alakíthatjuk át:

$$\begin{aligned}(c+\alpha_{n-1})(c+\alpha_n) - (c+\alpha_{n-1}\alpha_n)(c+1) &= c(\alpha_{n-1}+\alpha_n-1-\alpha_{n-1}\alpha_n) = \\ &= c(1-\alpha_{n-1})(\alpha_n-1).\end{aligned}$$

Itt feltétel szerint mind a 3 tényező pozitív és pozitívak az $f(c) - f^*(c)$ kifejezésében szereplő további tényezők is, tehát

$$f(c) > f^*(c).$$

Ha az α_m^* számok nem mind egyenlők, az eljárást ismételhetjük mert a szorzat közben mindig 1 marad. Legkésőbb $n-1$ lépés után minden α 1 lesz. Mivel közben a fellépő f értékek növekednek, azt kapjuk, hogy

$$f(c) > (c+1)^n.$$