I. megoldás. A feladat feltételeiből következik, hogy az egész számok színezése 100 hosszúságú periódusokban ismétlődik az egész számegyenes mentén, és egy perióduson belül minden szín előfordul.

Ha ezt belátjuk, ebből következik, hogy két szám színe akkor és csak akkor egyezik meg, ha különbségük a 100 többszöröse. -1982 és 1982 tehát különböző színű, mert különbségük 3964, nem osztható 100-zal.

A színezés periodikus voltának belátásához előbb belátjuk, hogy

a) van olyan A és d_1 természetes szám, amelyekre minden A-nál nagyobb szám színe megegyezik a d_1-gyel nagyobb száméval,

b) hasonlóan van olyan B és d_2 természetes szám, hogy minden $-B$-nél kisebb egész színe megegyezik a d_2-vel kisebb száméval,

c) ezután belátjuk, hogy a két periodikus részszínezés az egész számegyenes egyetlen periodikus színezésének a része.

Az *a)* és *b)* részállítás bizonyítása ugyanazon gondolatmenettel történhet, elég tehát az *a)* állítás bizonyítását részletezni.

Nevezzük *alapszámköz*nek azokat a számközöket, amelyeknek a kezdő és végső száma ugyanolyan színű és más egyező színű számpár nincs a számközben.

Egy alapszámköz legfeljebb 101 egész számot tartalmazhat, mert 100 színünk van, s így bármelyik számtól elindulva legkésőbb a 101-edik színe kell, hogy megegyezzék az előzők valamelyikével. Minden 101 egészet tartalmazó számköz tartalmaz is alapszámközt, hiszen az első számtól elindulva addig megyünk, míg először nem érünk a számköz egy korábbi számával egyező színű számához; ekkor ez a két egyező színű szám alapszámközt fog közre.

A természetes számok közt végtelen sok alapszámköz van, hiszen pl. a $[101n, 101n+100]$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ számközök 101–101 egészből állnak, s így mindegyik tartalmaz alapszámközt. Mivel egy alapszámköz legalább 2 és legfeljebb 101 egészet tartalmaz, kell olyan d_1 egésznek lennie, hogy végtelen sok alapszámköz $d_1 + 1$ egészet (d_1 különböző színűt) tartalmaz. Legyenek $[a_i, a_i + d_1]$ $(i = 1, 2, \ldots$ és $a_i \geq 0)$, $d_1 + 1$ pozitív egészből álló alapszámközök. Megmutatjuk, hogy minden $A = a_1$-nél nagyobb n-re n és $n + d_1$ színe megegyezik.

Legyen $n > A$. Mivel az a_i nem-negatív egészek sorozata végtelen, választhatjuk j-t úgy, hogy $a_j \geq n$ teljesüljön. Az alapszámköz definíciójából következik, hogy az $[A, a_j]$ és az $[A+d_1, a_j+d_1]$ számközök kezdő számai is egyező színűek, a záró egészek is. Világos, hogy a két számköz ugyanannyi egészből áll és j választása szerint n az első számközhöz tartozik. A feladatnak a színezésre vonatkozó feltétele szerint ekkor következik, hogy $n+d_1$ színe megegyezik n színével. Ezzel az *a)* állítást igazoltuk. Meggondolásainkat a negatív egészekből álló alapszámközökre alkalmazva kapjuk a *b)* állítás igazolását.

Az *a)*, ill. *b)* állítás helyességéből természetesen az is következik, hogy ha k pozitív egész és $n > A$, ill. $m < -B$, akkor n és $n + kd_1$, ill. m és $m - kd_2$ egyező színű.

A két periodikus rész kapcsolatának tisztázásához jegyezzük meg először is, hogy mind a két rész periodikus pl. $d_1 \cdot d_2$ szerint, hiszen csak a fenti állításban k helyett az első esetben d_2-t, a másodikban d_1-et kell írni. Megmutatjuk, hogy ez igaz az egész számegyenesre is.

Legyen ugyanis r tetszés szerinti egész, $u < -B$, $v > A$, továbbá $u \leq r \leq v$. Ekkor $u - d_1d_2$ és u, ill. v és $v + d_1d_2$ egyező színűek, így az $[u - d_1d_2, v]$ és $[u, v + d_1d_2]$ kielégítik a feladatban szereplő feltételeket, és az első tartalmazza r-et, így következik, hogy r és $r + d_1d_2$ ugyanolyan színű.

Azt kell még belátnunk, hogy a legrövidebb periódushossz 100. Itt használjuk ki azt az eddig még nem értékesített tényt, hogy egy egyik végpontjától megfosztott alapszámköz csupa különböző színű pontból áll. Eszerint az A-nál nagyobb egészek d_1 színnel vannak színezve, nem kevesebbel, mert tartalmaznak $d_1 + 1$ elemből álló alapszámközt, de nem is többel, hiszen színezésük d_1 hosszúságú egyező periódusokból tevődik össze.

Ekkor azonban az egész számegyenes is d_1 színnel van színezve, mert tetszés szerinti r egészhez van olyan s pozitív egész, hogy $r+s\, d_1d_2 > A$. Ekkor r és $r+s\, d_1d_2$ színe egyező, de az utóbbi szám színe csak az A-nál nagyobb számoknál használt d_1 szín valamelyike lehet. Az összes egész tehát d_1 színnel van színezve, vagyis $d_1 = 100$. Továbbá minden d_1d_2 hosszúságú periódus előfordul az A-nál nagyobb számok közt is, tehát d_2 darab egyező színezésű részperiódusból tevődik össze. Az összes egész színezése tehát $d_1 = 100$ különböző színű, egymás utáni egész színezésének periodikus ismétlésével származtatható. Mint láttuk, ebből a feladat állítása is következik.

Megjegyzések. 1. Nyilván nincs a 100-nak kitüntetett szerepe (azon kívül, hogy nem osztója 3964-nek). Ha 100 helyett k színt használunk fel a feladatban kívánt feltételeket kielégítve, akkor ezt csak úgy tehetjük, hogy k szomszédos pont különböző színű legyen és ez a színezés periodikusan ismétlődjék.

2. Ha csak a feladat állításának bizonyítására törekszünk, ehhez eljuthatunk anélkül, hogy az egész számegyenes színezését tisztáznánk.

II. Megoldás. Legyen M 1982-nél nagyobb természetes szám, továbbá akkora, hogy a $[-M, M]$ számköz egészeinek színezésében mind a 100 szín előforduljon. Az M-nél nagyobb számok színezésében legalább egy S_1 színnek végtelen sokszor elő kell fordulnia. Legyenek az S_1 színű számok

$$M + a_1 < M + a_2 < \ldots$$

A

$$-M-a_1,\ -M-a_2,\ ,\dots,\ -M-a_{101}$$

számok között kell legalább két egyszínűnek lennie, mondjuk $-M-a_j$ és $-M-a_i\,S_2$ színű $(i<j)$. Ekkor a

$$[-M-a_j,\ M+a_i]=I \quad \text{és} \quad [-M-a_i,\ M+a_j]=J$$

számközök kezdő számai S_2 zínűek, a végsők S_1 színűek és egyaránt $2M+a_i+a_j+1$ egészet tartalmaznak. A feladat feltételei szerint így színezésük megegyezik.

A két számköz részben átfedi egymást, $[-M-a_i,\ M+a_i]$ mindkettőhöz hozzátartozik. A csak I-hez tartozó

(1) $$-M-a_j,\ \dots,\ -M-a_i-1$$

számok számát jelöljük d-vel $(d=a_j-a_i)$. Mivel I és J ugyanúgy van színezve, így speciálisan

$$[-M-a_j,\ -M-a_i]=I_1 \quad \text{és} \quad [-M-a_i,\ -M-a_i+d]=J_1$$

részeik színezése is megegyezik.

Az (1) számok közt balról az első két egyező színű legyen, ha van

$$b_1=-M-a_j+b, \quad \text{és} \quad b_1+d_1,$$

színük legyen S_3. Ha az (1) számok mind különböző színűek, akkor $d_1=d$, $b_1=-M-a_j$, $b_1+d_1=b_1+d=-M-a_i+d=-M-a_j$, és $S_3=S_2$. Ez azt jelenti, hogy

$$-M-a_j,-M-a_j+1,\dots,-M-a_j+b,-M-a_j+b+1,\dots,-M-a_j+b+d_1-1$$

számok mind különböző színűek. Itt $b=0$ is lehet, ez esetben csak az utolsó d_1 számú számról van szó; egyébként ekkor $S_3=S_2$, I_1 és J_1 egyező színezése folytán

$$b_2=b_1+d, \quad \text{és} \quad b_2+d_1$$

színe is S_3. Ekkor viszont a

$$[b_1,\,b_2]=I_2, \qquad [b_1+d_1,\,b_2+d_1]=J_2$$

számközökre is teljesülnek a feladatban szereplő feltételek, tehát ezeknek a számközöknek is megegyezik a színezése.

Belátjuk, hogy d_1 osztója d-nek és I_1 színezése periodikus d_1 periódussal. Ez nyilvánvaló, ha $d_1=d$, s így $b_1=-Ma_j$, $b_1+d_1=-M-a_i$. Feltehetjük tehát, hogy $d_1<d$. Ekkor b_1+d_1 benne van a $[b_1,\,b_2]$ számközben. Így I_2 és J_2-re nyert színezési feltétel szerint $[b_1,\,b_1+d_1]$ és $[b_1+d_1,\,b_1+2d_1]$ ugyanúgy van színezve.

Ha még b_1+2d_1 is benne van I_1-ben, akkor I_2 és J_2 színezésének egyezése folytán az utóbbi számköz és a hozzá csatlakozó $[b_1+2d_1,\,b_1+3d_1]$ színezése is megegyezik. Legyen k_1 az az egész, amelyre $b_1+(k_1-1)d_1\le -M-a_i<b_1+k_1d_1$, akkor a gondolat ismételt alkalmazásával azt kapjuk, hogy a

$$[b_1,\,b_1+d_1],\,[b_1+d_1,\,b_1+2d_1],\,\dots,\,[b_1+(k_1-1)d_1,\,b_1+k_1d_1]$$

számközök színezése mind megegyezik, és pedig az utolsó számtól eltekintve csupa különböző színű számból áll mindegyik.

Az utolsó számköz részben a J_1 elejét fedi. Ez csak úgy lehet, hogy $b=0$, mert különben az I_1-gyel egyező színezésű J_1 a $[b_1,\,b_1+d_1]$-ben, s így $[b_1+\,+(k_1-1)d_1,\,b_1+k_1d_1]$-ben sem szereplő színű számokkal kezdődnék. Ez azt is jelenti,hogy $b_1=-M-a_j$, s így $S_3=S_2$. De nem lehetséges az sem, hogy $b_1+(k_1-1)d_1<-M-a_i$ legyen, mert ekkor a $[b_1+(k_1-1)d_1,b_1+k_1d_1]$ számköz belsejében is volna egy S_2 színű, tehát a szélső számokkal egyező színű szám.

Ezzel beláttuk, hogy az I_1 utolsó számának elhagyásával keletkező számköz egymással egyező színezésű, d_1 különböző színű számból álló számközökből tevődik össze.

Térjünk végül vissza az egyező színezésű és egymást részben átfedő I és J számközhöz. Láttuk, hogy

$$[-M-a_j,\ -M-a_i],\ \text{és a}\ [-M-a_i,\ -M-a_i+d]$$

számközök színezése megegyezik. Ha az utóbbi számköz még teljesen I-hez tartozik, akkor $[-M-a_i+d,-M-a_i+2d]$ színezése megegyezik az előbbi két számközével. Ha k az az egész, amelyre

$$-M-a_j+(k-1)d\le -M-a_i<-M-a_j+kd,$$

akkor a

$$[-M-a_j,\ -M-a_i],\,[-M-a_i,\ -M-a_i+d],\,\dots$$
$$[-M-a_i+(k-1)d,\ -M-a_i+kd]$$

egymáshoz csatlakozó számközök ugyanúgy vannak színezve és lefedik a $[-M-a_j, M+a_i]$ számközt, tehát mindenesetre a $[-M, M]$ számközt is. Ezek színezése tehát előző megállapításaink szerint d_1 szerint periodikus, és egy periódus d_1 különböző színű számból áll. Mivel $[-M, M]$-ben mind a 100 szín előfordul, így $d_1 = 100$, és két szám színe pontosan akkor egyezik meg, ha különbségük osztható 100-zal. -1982 és 1982 tehát különböző színű.

Megjegyzés. Látszólag itt csak egy véges számközről bizonyítottuk be, hogy színezése periodikus 100 periódussal, valójában azonban ez a bizonyítás azt is adja, hogy az egész számegyenes periodikusan van kiszínezve 100 hosszúságú periódussal. Legyen ugyanis n tetszés szerinti egész szám és M akkora, hogy a $[-M, M]$ számköz tartalmazza n-et, $n+100$-at és színezésében mind a 100 szín előfordul. Az elmondott bizonyítás ekkor is azt adja, hogy a $[-M, M]$ számköz periodikusan van színezve 100 hosszúságú, különböző színű számokból álló periódussal, tehát n és $n+100$ egyező színű, n, $n+1, \ldots, n+99$ viszont különböző színű számok.