

(A legkisebb közös többszörös annyiszor fordul elő az alábbi szövegben, hogy röviden lkkt-t írunk helyette.)

**I. megoldás.** Az  $a_1, a_2, \dots, a_m$  számok lkkt-ét – amit így szokás jelölni:  $[a_1, a_2, \dots, a_m]$ , – úgy határozhatjuk meg, hogy minden prímszámot, amelyik a számok valamelyikének osztója, vesszük azon a legmagasabb hatványon, amelyiken osztója valamelyik  $a_i$ -nek, és ezeket a prímszámhatványokat összeszorozzuk. Eszerint

$$T_n = [n, n+1, \dots, n+k-1] \text{ és } T_{n+1} = [n+1, n+2, \dots, n+k-1, n+k]$$

prímhatványokra történő felbontásában egyenlő hatványon szerepelnek azok a prímszámok, amelyeknek a legmagasabb hatványa az  $n+1, n+2, \dots, n+k-1$  számok valamelyikének a felbontásában fordul elő.  $T_n$ -ben magasabb hatványon szerepelnek, mint  $T_{n+1}$ -ben azok a prímelek (ha vannak), amelyeknek magasabb hatványa osztója  $n$ -nek, mint  $n+1, \dots, n+k$  bármelyikének, és alacsonyabb hatványon azok az esetleges prímelek, amelyeknek magasabb hatványa osztója  $n+k$ -nak, mint  $n, \dots, n+k-1$  bármelyikének.

Legyenek  $p_1, \dots, p_g$  az előbbi tulajdonságú prímelek és legyen  $p_j$  a  $T_n$ -nek (s így  $n$ -nek is) a  $t_j$ -edik hatványon osztója,  $T_{n+1}$ -nek az  $u_j$ -edik hatványon osztója, ahol  $t_j > u_j$  ( $j = 1, \dots, g$ ); hasonlóan legyenek az utóbbi tulajdonsággal rendelkező prímelek  $q_1, \dots, q_h$  és  $q_j$   $T_n$ -nek  $v_j$ -edik,  $T_{n+1}$ -nek  $w_j$ -edik hatványon osztója,  $v < w_j$  ( $j = 1, \dots, h$ ). Ekkor

$$(1) \quad T_{n+1} = \frac{q_1^{w_1-v_1} \dots q_h^{w_h-v_h}}{p_1^{t_1-u_1} \dots p_g^{t_g-u_g}} T_n.$$

Végtelen sok olyan  $n$  értékre van tehát szükségünk, amelyekre a  $T_n$  a jobb oldalon 1-nél kisebb számmal van megszorozva. Ehhez legegyszerűbb  $n$ -et úgy választani, hogy  $n+1, \dots, n+k-1$  egyikével se legyen 1-nél nagyobb közös osztója,  $(n+k)$ -nak viszont legalább az egyikükkel legyen. Ekkor a tört nevezője  $n$  lesz, a számlálója pedig legfeljebb  $\frac{n+k}{2}$ . A tört tehát nem nagyobb, mint  $\frac{n+k}{2n}$ ; ez pedig 1-nél kisebb, ha  $n$  nagyobb  $k$ -nál.

Ha végtelen sok  $n$ -re kielégítjük az első két feltételt, akkor közülük végtelen sok nagyobb is lesz mint  $k$ , tehát elég olyan  $n$  egészeket keresnünk, amelyekre  $n$  relatív prím az  $n+1, \dots, n+k-1$  számokhoz,  $n+k$  pedig legalább egyikhez nem relatív prím. A feladatot megoldó versenyzők mind ezt az utat választották, de az  $n$  kívánt tulajdonságait igen különböző, módokon biztosították. Bemutatjuk a lényegében legegyszerűbbnek látszót.

Ha valamilyen  $j$ -re  $n$ -nek és  $(n+j)$ -nek van 1-nél nagyobb közös osztója, akkor ez közös osztója  $n$  és  $(n+j) - n = j$ -nek is és megfordítva is:  $n$  és  $j$  közös osztói  $(n+j)$ -nek is osztói. Azt kell tehát elérnünk, hogy kiválasztandó számaink az

$$(*) \quad 1, 2, \dots, k-1$$

számokhoz relatív prímelek legyenek, tehát például a szorzatukhoz is. Ezzel a tulajdonsággal rendelkeznek az<sup>1</sup>

$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-1)$$

szorzat többszöröseinek a szomszédai, tehát a  $c((k-1)!) \pm 1$  számok.

Ahhoz, hogy a  $k$ -val nagyobb  $c((k-1)!) + k \pm 1$  a (\*) alatti számok valamelyikéhez ne legyen relatív prím, a kettős előjelből a negatívát célszerű választani. Ez esetben a  $k$ -val növelt szám osztható  $(k-1)$ -gyel, és az  $(n+1)$ -ként adódó  $c((k-1)!)$  is osztható  $(k-1)$ -gyel.

Ha tehát az

$$n_c = c((k-1)!) - 1$$

számokat választjuk, az (1) egyenlőség nevezője  $n_c$  lesz, számlálója pedig legfeljebb

$$\frac{n_c + k}{k-1}.$$

Így

$$T_{n_c+1} \leq \frac{n_c + k}{(k-1)n_c} T_{n_c}.$$

Itt  $k-1 \geq 2$ , mert a feladat feltétele szerint  $k > 2$ . Ha tehát  $n_c > k$  is teljesül (ami  $k = 3$ -nál  $c \geq 3$ -ra,  $k > 3$  esetén minden pozitív egész  $c$ -re igaz), akkor

$$\frac{n_c + k}{(k-1)n_c} < 1, \text{ tehát } T_{n_c+1} < T_{n_c}.$$

Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Megjegyezzük, hogy  $k = 2$ -re nem igaz a feladat állítása,  $[n, n+1] = n(n+1)$  és ez növekvő  $n$ -nel állandóan növekszik.

<sup>1</sup>Ezt a szorzatot „ $k$ -1 faktoriális”-nak nevezik és így jelölik:  $(k-1)!$

*Megjegyzések.* 1. A lkkt-nek a megoldás elején ismertett megadásmódja ismét az első feladathoz fűzött 3. megjegyzésben említett számelmélet alaptételéből következik.

2. Egy versenyző  $(k-1)!$  helyett a lényegesen kisebb  $[1, 2, \dots, k-1]$  számot használta, de elég lett volna ehelyett a  $k$ -nál kisebb prímek szorzatát venni, amint azt könnyen beláthatja az olvasó. Összehasonlításképpen már  $k=21$ -re  $(k-1)!$  felette van a 4700 milliárdnak,  $[1, 2, \dots, k-1]$  közel 233,3 millió, a prímek szorzata pedig valamivel 9,7 millió alatt van.

**II. Megoldás.** Megkaphatjuk az  $[n, n+1, \dots, n+k-1]$  lkkt-t úgy is, hogy az  $n(n+1)\dots(n+k-1)$  szorzatot elosztjuk bizonyos számokkal, tehát

$$(2) \quad [n, n+k, \dots, n+k-1] = \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{v_{n,k}}$$

alakban, ahol  $v_{n,k}$  természetes szám.

Mielőtt ennek helyességét belátnánk, nézzük meg, hogyan alakul ennek felhasználásával a feladat állításában szereplő egyenlőtlenség. A megfelelő kifejezéseket beírva, kézenfekvő átalakításokkal az

$$nv_{n+1,k} > (n+k)v_{n,k}$$

vagy

$$(3) \quad n(v_{n+1,k} - v_{n,k}) > kv_{n,k}$$

adódik. A bal oldalnak pozitívnak kell lennie, amihez

$$(4) \quad v_{n+1,k} > v_{n,k}$$

szükséges. Ha ez fennáll, akkor az utolsó egyenlőtlenség bizonyosan teljesül, ha maga  $n$  nagyobb a jobb oldalnál, mert a szorzója legalább 1.

Ezek alapján a feladat állítása következik abból, ha megmutatjuk, hogy

- a) Minden adott  $k$ -ra  $v_{n,k}$  egy csak  $k$ -tól függő korlátnál nem nagyobb, és
- b) ha  $k \geq 3$ , adott, akkor  $v_{n,k}$  értéke végtelen sokszor változik.

Valóban a b) szerinti változás nem lehet valamilyen határon túl mindig csökkenés, hiszen  $v_{n,k}$ -nak mindig pozitív egésznek kell lennie, de nem lehet valamilyen értéken túl mindig növekedés sem, hiszen akkor  $v_{n,k}$  minden korláton túlnőne, ami a) miatt nem lehet. Van tehát végtelen sok olyan  $n$ , amelyre (4) teljesül.

Legyen  $V$  egy olyan érték, aminél  $v_{n,k}$  sohasem nagyobb, akkor mindazokra az  $n$ -ekre, amikre (4) teljesül és amelyek  $kV$ -nél nagyobbak, igaz, hogy

$$n(v_{n+k-1} - v_{n,k}) > kV \geq kv_{n,k},$$

tehát teljesül (3), abból pedig a feladat állításában szereplő egyenlőtlenség ekvivalens átalakításokkal következik.

A feladat állításának bizonyításához tehát elég a (2) alakú előállítás létezését bizonyítani (egész nevezővel) és a nevező a) és b) tulajdonságát.

A (2) felbontáshoz eljuthatunk úgy, hogy leírjuk egyenként a számláló tényezőit és  $n+j$  leírása után ( $1 \leq j \leq k-1$ ) nézzük annak prímszámhatványok szorzatára bontott alakját. Ha van a prím alapok közül valamelyiknek korábban is többszöröse, akkor veszünk egy olyan  $n+i$  ( $0 \leq i < j$ ) tényezőt, amelyik az illető prím legnagyobb hatványával osztható, és ha ez a hatvány nem nagyobb az  $(n+j)$ -ben szereplő hatványnál, akkor a nevezőbe írjuk, különben az  $(n+j)$ -ben fellépő hatványt írjuk a nevezőbe. Világos, hogy így a  $k$ -adik lépésben megkapjuk a keresett lkkt-t.  $v_{n,k}$  a nevezőbe került prímszámhatványok szorzata.

A nevezőbe írt prímszámhatvány osztója  $(n+i)$ -nek is,  $(n+j)$ -nek is, tehát a különbségüknek  $j-i$ -nek is, ami pozitív és nem nagyobb  $j$ -nél. Az  $n+j$  sorra vételénél tehát a  $j, j-1, \dots, 2$  bizonyos prímszámhatvány osztóival osztunk, tehát összességében nem nagyobb számmal, mint  $j!$  Ezt  $j=1, 2, \dots, (k-1)$ -re alkalmazva kapjuk, hogy

$$v_{n,k} \leq 2!3! \dots (k-1)!,$$

$v_{n,k}$  csak véges sok értéket vesz fel.<sup>2</sup> Ezzel beláttuk a (2) alakú felbontás létezését és az a) állítást. Igazoljuk még b)-t.

Világos, hogy  $v_{n,2} = 1$  minden  $n$ -re.

Legyen  $p$  egy  $k$ -nál kisebb prímszám, amelyik nem osztója  $k$ -nak. – Ilyenek pl. a  $k-1$  ( $\geq 2$ ) prímosztói. – Válasszuk  $n$ -et úgy, hogy  $n+k$  többszöröse legyen  $p$ -nek, és vizsgáljuk  $p$  kitevőjét  $v_{n,k}$  és  $v_{n+1,k}$  prímszámhatványok szorzatára bontott alakjában.

Nem lehet  $n$  is többszöröse  $p$ -nek, mert különben az  $(n+k) - n = k$  is osztható volna  $p$ -vel, ellentétben  $p$  választásával.

Mivel  $p < k$ , van többszöröse az  $n+1, n+2, \dots, n+k-1$  számok közt. Ha áttérünk  $[n, n+1, \dots, n+k-1]$ -ről  $[n+1, \dots, n+k-1, n+k]$ -ra, akkor a (2) jobb oldalának számlálójából elmarad a  $p$ -vel nem osztható

<sup>2</sup> Belátható, hogy az is igaz, hogy  $v_n \leq (k-1)!$  pontosabban  $v_{n,k} | (k-1)!$ , és az egyenlőtlenségben végtelen sokszor az „=” jel érvényes.

$n$  tényező és megjelenik a  $p$ -vel osztható  $n + k$ . Világos, hogy  $n$  elhagyása a  $p$  kitevőjét nem befolyásolja, viszont  $n + k$  hozzávétele után az előállításra vonatkozó gondolatmenetet követve látható, hogy a nevezőbe kell írunk  $p$ -nek valamilyen hatványát.  $v_{n+1,k}$  tehát  $p$ -nek magasabb hatványával osztható, mint  $v_{n,k}$ , s így (függetlenül esetleges egyéb különbségektől) különböző számok, mivel a számok prímhatalványokra történő felbontása lényegében egyértelmű.

*Megjegyzések.* 1. Az I. megoldás során több módon is megadtunk adott  $k$ -hoz végtelen sok olyan  $n$  értéket, amire teljesül a  $T_n < T_{n+1}$  egyenlőtlenség, de távolról sem adtuk meg az összes ilyen  $n$ -et. Ez reménytelenül nehéz feladatnak is látszik.<sup>3</sup> Belátható, hogy a legkisebb  $n$  is, ami ott adódik, sokkal nagyobb  $k$ -nál.

Jelöljük  $n_k$ -val adott  $k$ -hoz a legkisebb olyan  $n$ -et, amire teljesül a  $T_n < T_{n+1}$  egyenlőtlenség. Néhány értéket a következő táblázat mutat:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	29	30	31	32	210
$n_k$	—	5	5	7	9	8	11	11	11	13	13	17	16	17	17	31	47	32	37	237

Láthatólag ezek az értékek alig nagyobbak  $k$ -nál. Az világos, hogy  $n_k$ -nak  $k$ -nál nagyobbak kell lennie, mert ha  $n \leq k$ , akkor az  $n + 1, \dots, n + k$  között van  $n$ -nel osztható, hiszen  $2n \leq n + k$ . Így  $[n + 1, \dots, n + k]$  osztható  $n$ -nel, és természetesen  $n + 1, \dots, n + k - 1$ -gyel is, tehát  $[n, \dots, n + k - 1]$  osztója  $[n + 1, \dots, n + k]$ -nak, amiből következik, hogy nem lehet az előbbi nagyobb.

A prímszámok eloszlására vonatkozó mély tételek segítségével belátható, hogy  $n_k/k$  tetszés szerinti 1-nél nagyobb  $h$  számnál kisebb lesz, amint  $k$  egy alkalmas ( $h$ -tól függő) korlátnál nagyobb.

2. Számolás közben sok olyan  $n$ -re találunk, amelyre  $[n, \dots, n + k - 1] = [n + 1, \dots, n + k]$ . Ez  $n = k$ -ra pl. csak akkor nem teljesül, ha  $k$  a 2-nek egy hatványa. De  $k = 19$ -re pl.  $n = 19$ -től  $n = 22$ -ig négy egymás utáni értékre teljesül az egyenlőség,  $k = 210$ -re, pedig  $n = 213$ -től  $n = 220$ -ig nyolc egymás utáni esetben. Ezek után első pillanatra talán meglepően hat, hogy minden  $k$ -hoz legfeljebb véges sok esetben lehet két szomszédos lkkt egyenlő, pedig a (2) formula alapján ez legfeljebb az

$$n = \frac{kv_{n,k}}{v_{n+1,k} - v_{n,k}}$$

értékekre teljesül (és közülük az egész értékekre teljesül is). Mivel pedig  $v_{n,k}$  csak véges számú különböző értéket vehet fel, így csak véges számú megfelelő  $n$  létezik.

---

<sup>3</sup> Figyeljük meg, hogy a II. megoldás csak végtelen sok ilyen  $n$  létezését bizonyítja, anélkül, hogy megadna ilyen  $n$ -eket. Annak a gondolatmenetnek az alapján csak a  $v_{n,k}$  nevezők szerkezetének sokkal pontosabb ismerete tenné lehetővé ilyen  $n$ -ek megadását.