(A legkisebb közös többszörös annyiszor fordul elő az alábbi szövegben, hogy röviden lkkt-t írunk helyette.)

**I. megoldás.** Az $a_1, a_2, \ldots, a_m$ számok lkkt-ét – amit így szokás jelölni: $[a_1, a_2, \ldots, a_m]$, – úgy határozhatjuk meg, hogy minden prímszámot, amelyik a számok valamelyikének osztója, vesszük azon a legmagasabb hatványon, amelyiken osztója valamelyik $a_i$-nek, és ezeket a prímszámhatványokat összeszorozzuk. Eszerint

$$T_n = [n, n+1, \ldots, n+k-1] \text{ és } T_{n+1} = [n+1, n+2, \ldots, n+k-1, n+k]$$

prímhatványokra történő felbontásában egyenlő hatványon szerepelnek azok a prímszámok, amelyeknek a legmagasabb hatványa az $n+1, n+2, \ldots, n+k-1$ számok valamelyikének a felbontásában fordul elő. $T_n$-ben magasabb hatványon szerepelnek, mint $T_{n+1}$-ben azok a prímek (ha vannak), amelyeknek magasabb hatványa osztója $n$-nek, mint $n+1$, $\ldots$, $n+k$ bármelyikének, és alacsonyabb hatványon azok az esetleges prímek, amelyeknek magasabb hatványa osztója $n+k$-nak, mint $n, \ldots, n+k-1$ bármelyikének.

Legyenek $p_1, \ldots, p_g$ az előbbi tulajdonságú prímek és legyen $p_j$ a $T_n$-nek (s így $n$-nek is) a $t_j$-edik hatványon osztója, $T_{n+1}$-nek az $u_j$-edik hatványon osztója, ahol $t_j > u_j$ $(j = 1, \ldots, g)$; hasonlóan legyenek az utóbbi tulajdonsággal rendelkező prímek $q_1, \ldots, q_h$ és $q_j$ $T_n$-nek $v_j$-edik, $T_{n+1}$-nek $w_j$-edik hatványon osztója, $v < w_j$ $(j = 1, \ldots, h)$. Ekkor

$$T_{n+1} = \frac{q_1^{w_1-v_1} \ldots q_h^{w_h-v_h}}{p_1^{t_1-u_1} \ldots p_g^{t_g-u_g}} T_n. \tag{1}$$

Végtelen sok olyan $n$ értékre van tehát szükségünk, amelyekre a $T_n$ a jobb oldalon 1-nél kisebb számmal van megszorozva. Ehhez legegyszerűbb $n$-et úgy választani, hogy $n+1, \ldots, n+k-1$ egyikével se legyen 1-nél nagyobb közös osztója, $(n+k)$-nak viszont legalább az egyikükkel legyen. Ekkor a tört nevezője $n$ lesz, a számlálója pedig legfeljebb $\dfrac{n+k}{2}$. A tört tehát nem nagyobb, mint $\dfrac{n+k}{2n}$; ez pedig 1-nél kisebb, ha $n$ nagyobb $k$-nál.

Ha végtelen sok $n$-re kielégítjük az első két feltételt, akkor közülük végtelen sok nagyobb is lesz mint $k$, tehát elég olyan $n$ egészeket keresnünk, amelyekre $n$ relatív prím az $n+1, \ldots, n+k-1$ számokhoz, $n+k$ pedig legalább egyikhez nem relatív prím. A feladatot megoldó versenyzők mind ezt az utat választották, de az $n$ kívánt tulajdonságait igen különböző, módokon biztosították. Bemutatjuk a lényegében legegyszerűbbnek látszót.

Ha valamilyen $j$-re $n$-nek és $(n+j)$-nek van 1-nél nagyobb közös osztója, akkor ez közös osztója $n$ és $(n+j)-n = j$-nek is és megfordítva is: $n$ és $j$ közös osztói $(n+j)$-nek is osztói. Azt kell tehát elérnünk, hogy kiválasztandó számaink az

$$1, 2, \ldots, k-1 \tag{*}$$

számokhoz relatív prímek legyenek, tehát például a szorzatukhoz is. Ezzel a tulajdonsággal rendelkeznek az[1]

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-1)$$

szorzat többszöröseinek a szomszédai, tehát a $c\big((k-1)!\big) \pm 1$ számok.

Ahhoz, hogy a $k$-val nagyobb $c\big((k-1)!\big) + k \pm 1$ a (*) alatti számok valamelyikéhez ne legyen relatív prím, a kettős előjelből a negatívat célszerű választani. Ez esetben a $k$-val növelt szám osztható $(k-1)$-gyel, és az $(n+1)$-ként adódó $c\big((k-1)!\big)$ is osztható $(k-1)$-gyel.

Ha tehát az

$$n_c = c\big((k-1)!\big) - 1$$

számokat választjuk, az (1) egyenlőség nevezője $n_c$ lesz, számlálója pedig legfeljebb

$$\frac{n_c + k}{k-1}.$$

Így

$$T_{n_c+1} \le \frac{n_c + k}{(k-1)n_c} T_{n_c}.$$

Itt $k-1 \ge 2$, mert a feladat feltétele szerint $k > 2$. Ha tehát $n_c > k$ is teljesül (ami $k = 3$-nál $c \ge 3$-ra, $k > 3$ esetén minden pozitív egész $c$-re igaz), akkor

$$\frac{n_c + k}{(k-1)n_c} < 1, \quad \text{tehát} \quad T_{n_c+1} < T_{n_c}.$$

Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Megjegyezzük, hogy $k = 2$-re nem igaz a feladat állítása, $[n, n+1] = n(n+1)$ és ez növekvő $n$-nel állandóan növekszik.

[1] Ezt a szorzatot „k-1 faktoriális"-nak nevezik és így jelölik: $(k-1)!$

*Megjegyzések.* 1. A lkkt-nek a megoldás elején ismertetett megadásmódja ismét az első feladathoz fűzött 3. megjegyzésben említett számelmélet alaptételéből következik.

2. Egy versenyző $(k-1)!$ helyett a lényegesen kisebb $[1, 2, \ldots, k-1]$ számot használta, de elég lett volna ehelyett a $k$-nál kisebb prímek szorzatát venni, amint azt könnyen beláthatja az olvasó. Összehasonlításul már $k = 21$-re $(k-1)!$ felette van a 4700 billiónak, $[1, 2, \ldots, k-1]$ közel 233,3 millió, a prímek szorzata pedig valamivel 9,7 millió alatt van.

**II. Megoldás.** Megkaphatjuk az $[n, n+1, \ldots, n+k-1]$ lkkt-t úgy is, hogy az $n(n+1)\ldots(n+k-1)$ szorzatot elosztjuk bizonyos számokkal, tehát

$$[n, n+k, \ldots, n+k-1] = \frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{v_{n,k}} \tag{2}$$

alakban, ahol $v_{n,k}$ természetes szám.

Mielőtt ennek helyességét belátnánk, nézzük meg, hogyan alakul ennek felhasználásával a feladat állításában szereplő egyenlőtlenség. A megfelelő kifejezéseket beírva, kézenfekvő átalakításokkal az

$$nv_{n+1,k} > (n+k)v_{n,k}$$

vagy

$$n(v_{n+1,k} - v_{n,k}) > kv_{n,k} \tag{3}$$

adódik. A bal oldalnak pozitívnak kell lennie, amihez

$$v_{n+1,k} > v_{n,k} \tag{4}$$

szükséges. Ha ez fennáll, akkor az utolsó egyenlőtlenség bizonyosan teljesül, ha maga $n$ nagyobb a jobb oldalnál, mert a szorzója legalább 1.

Ezek alapján a feladat állítása következik abból, ha megmutatjuk, hogy

a) Minden adott $k$-ra $v_{n,k}$ egy csak $k$-tól függő korlátnál nem nagyobb, és
b) ha $k \ge 3$, adott, akkor $v_{n,k}$ értéke végtelen sokszor változik.

Valóban a b) szerinti változás nem lehet valamilyen határon túl mindig csökkenés, hiszen $v_{n,k}$-nak mindig pozitív egésznek kell lennie, de nem lehet valamilyen értéken túl mindig növekedés sem, hiszen akkor $v_{n,k}$ minden korláton túlnőne, ami a) miatt nem lehet. Van tehát végtelen sok olyan $n$, amelyre (4) teljesül.

Legyen $V$ egy olyan érték, aminél $v_{n,k}$ sohasem nagyobb, akkor mindazokra az $n$-ekre, amikre (4) teljesül és amelyek $kV$-nél nagyobbak, igaz, hogy

$$n(v_{n+k-1} - v_{n,k}) > kV \ge kv_{n,k},$$

tehát teljesül (3), abból pedig a feladat állításában szereplő egyenlőtlenség ekvivalens átalakításokkal következik.

A feladat állításának bizonyításához tehát elég a (2) alakú előállítás létezését bizonyítani (egész nevezővel) és a nevező a) és b) tulajdonságát.

A (2) felbontáshoz eljuthatunk úgy, hogy leírjuk egyenként a számláló tényezőit és $n+j$ leírása után $(1 \le j \le k-1)$ nézzük annak prímszámhatványok szorzatára bontott alakját. Ha van a prím alapok közül valamelyiknek korábban is többszöröse, akkor veszünk egy olyan $n+i \; (0 \le i < j)$ tényezőt, amelyik az illető prím legnagyobb hatványával osztható, és ha ez a hatvány nem nagyobb az $(n+j)$-ben szereplő hatványnál, akkor a nevezőbe írjuk, különben az $(n+j)$-ben fellépő hatványt írjuk a nevezőbe. Világos, hogy így a $k$-adik lépésben megkapjuk a keresett lkkt-t. $v_{n,k}$ a nevezőbe került prímhatványok szorzata.

A nevezőbe írt prímszámhatvány osztója $(n+i)$-nek is, $(n+j)$-nek is, tehát a különbségüknek $j-i$-nek is, ami pozitív és nem nagyobb $j$-nél. Az $n+j$ sorravételénél tehát a $j$, $j-1$, …, 2 bizonyos prímszámhatvány osztóival osztunk, tehát összességében nem nagyobb számmal, mint $j!$ Ezt $j = 1, 2, \ldots, (k-1)$-re alkalmazva kapjuk, hogy

$$v_{n,k} \le 2!\,3!\,\ldots\,(k-1)!,$$

$v_{n,k}$ csak véges sok értéket vesz fel.[2] Ezzel beláttuk a (2) alakú felbontás létezését és az a) állítást. Igazoljuk még b)-t.

Világos, hogy $v_{n,2} = 1$ minden $n$-re.

Legyen $p$ egy $k$-nál kisebb prímszám, amelyik nem osztója $k$-nak. – Ilyenek pl. a $k-1 \; (\ge 2)$ prímosztói. – Válasszuk $n$-et úgy, hogy $n+k$ többszöröse legyen $p$-nek, és vizsgáljuk $p$ kitevőjét $v_{n,k}$ és $v_{n+1,k}$ prímhatványok szorzatára bontott alakjában.

Nem lehet $n$ is többszöröse $p$-nek, mert különben az $(n+k) - n = k$ is osztható volna $p$-vel, ellentétben $p$ választásával.

Mivel $p < k$, van többszöröse az $n+1$, $n+2$, …, $n+k-1$ számok közt. Ha áttérünk $[n, n+1, \ldots, n+k-1]$-ről $[n+1, \ldots, n+k-1, n+k]$-ra, akkor a (2) jobb oldalának számlálójából elmarad a $p$-vel nem osztható

[2] Belátható, hogy az is igaz, hogy $v_n \le (k-1)!$ pontosabban $v_{n,k} | (k-1)!$, és az egyenlőtlenségben végtelen sokszor az „=" jel érvényes.

$n$ tényező és megjelenik a $p$-vel osztható $n+k$. Világos, hogy $n$ elhagyása a $p$ kitevőjét nem befolyásolja, viszont $n+k$ hozzávétele után az előállításra vonatkozó gondolatmenetet követve látható, hogy a nevezőbe kell írnunk $p$-nek valamilyen hatványát. $v_{n+1,k}$ tehát $p$-nek magasabb hatványával osztható, mint $v_{n,k}$, s így (függetlenül esetleges egyéb különbségektől) különböző számok, mivel a számok prímhatványokra történő felbontása lényegében egyértelmű.

*Megjegyzések.* 1. Az I. megoldás során több módon is megadtunk adott $k$-hoz végtelen sok olyan $n$ értéket, amire teljesül a $T_n < T_{n+1}$ egyenlőtlenség, de távolról sem adtuk meg az összes ilyen $n$-et. Ez reménytelenül nehéz feladatnak is látszik. [3] Belátható, hogy a legkisebb $n$ is, ami ott adódik, sokkal nagyobb $k$-nál.

Jelöljük $n_k$-val adott $k$-hoz a legkisebb olyan $n$-et, amire teljesül a $T_n < T_{n+1}$ egyenlőtlenség. Néhány értéket a következő táblázat mutat:

| k | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 29 | 30 | 31 | 32 | 210 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_k$ | – | 5 | 5 | 7 | 9 | 8 | 11 | 11 | 11 | 13 | 13 | 17 | 16 | 17 | 17 | 31 | 47 | 32 | 37 | 237 |

Láthatólag ezek az értékek alig nagyobbak $k$-nál. Az világos, hogy $n_k$-nak $k$-nál nagyobbnak kell lennie, mert ha $n \leq k$, akkor az $n+1, \ldots, n+k$ között van $n$-nel osztható, hiszen $2n \leq n+k$. Így $[n+1, \ldots, n+k]$ osztható $n$-nel, és természetesen $n+1, \ldots, n+k-1$-gyel is, tehát $[n, \ldots, n+k-1]$ osztója $[n+1, \ldots, n+k]$-nak, amiből következik, hogy nem lehet az előbbi nagyobb.

A prímszámok eloszlására vonatkozó mély tételek segítségével belátható, hogy $n_k/k$ tetszés szerinti 1-nél nagyobb $h$ számnál kisebb lesz, amint $k$ egy alkalmas ($h$-tól függő) korlátnál nagyobb.

2. Számolás közben sok olyan $n$-re találunk, amelyre $[n, \ldots, n+k-1] = [n+1, \ldots, n+k]$. Ez $n=k$-ra pl. csak akkor nem teljesül, ha $k$ a 2-nek egy hatványa. De $k=19$-re pl. $n=19$-től $n=22$-ig négy egymás utáni értékre teljesül az egyenlőség, $k=210$-re, pedig $n=213$-tól $n=220$-ig nyolc egymás utáni esetben. Ezek után első pillanatra talán meglepően hat, hogy minden $k$-hoz legfeljebb véges sok esetben lehet két szomszédos lkkt egyenlő, pedig a (2) formula alapján ez legfeljebb az

$$n = \frac{kv_{n,k}}{v_{n+1,k} - v_{n,k}}$$

értékekre teljesül (és közülük az egész értékekre teljesül is). Mivel pedig $v_{n,k}$ csak véges számú különböző értéket vehet fel, így csak véges számú megfelelő $n$ létezik.

[3] Figyeljük meg, hogy a II. megoldás csak végtelen sok ilyen $n$ létezését bizonyítja, anélkül, hogy megadna ilyen $n$-eket. Annak a gondolatmenetnek az alapján csak a $v_{n,k}$ nevezők szerkezetének sokkal pontosabb ismerete tenné lehetővé ilyen $n$-ek megadását.