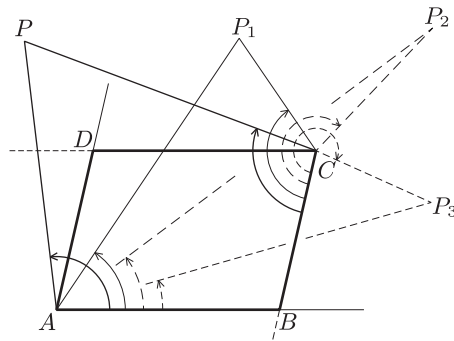


I. megoldás. Állapítsuk meg először, hol helyezkedik el a P pont. Megmutatjuk, hogy nem lehet az AB , AD félegyenesek meghatározta, C -t tartalmazó szögtartományban. Valóban, az itt fekvő P pontokra¹ a $PAB\angle$ része a $DAB\angle$ -nek, a $PCB\angle$ viszont tartalmazza a $DAB\angle$ -gel egyenlő $DCB\angle$ -et.

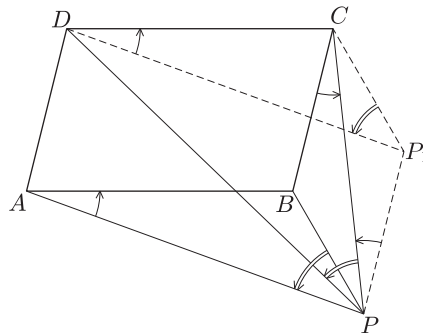


1. ábra

Hasonlóan nem lehet P az A -t tartalmazó DCB szögtartományban sem, tehát vagy az AB és CB egyenesek B -n túli meghosszabbításai közti kenvex szögtartományban van, vagy AD -nek és CD -nek a D -n túli meghosszabbításai közt.

Feltehetjük, hogy az előbbiben, mert ellenkező esetben az ellentétesen irányított BAP és BCP szögekkel együtt a paralelogramma A -nál, ill. C -nél levő szögével csökkentett DAP és DCP szögek nagysága is egyenlő és irányításuk ellentétes. Így tükrözve a paralelogramma középpontjára, visszavezettük a problémát arra az esetre, amikor P az AB és CB meghosszabbítása határolta tartományban van.

Toljuk el a P pontot a BC vektorral. Új helyzete legyen P_1 (2. ábra). Ekkor a DCP_1 háromszög az ABP háromszög eltolt képe, BPP_1C pedig paralelogramma. A $P_1DC\angle$ és a $PAB\angle$ irányítás és nagyság szerint megegyezik. Utóbbi a feladat feltétele szerint a $BCP\angle$ -gel egyezik meg nagyságban és irányításra is, ez pedig a $P_1PC\angle$ -gel, mert a BPP_1C paralelogramma középpontjára való tükrözés egymásba viszi át a kettőt.

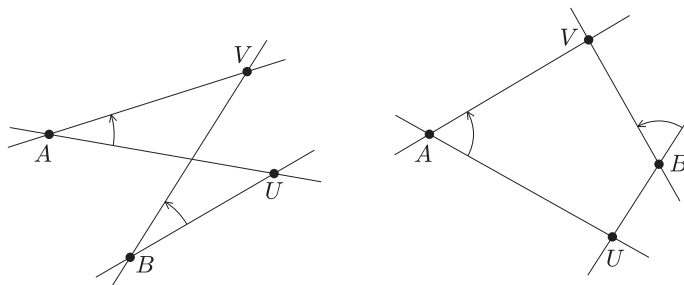


2. ábra

Azt nyertük tehát, hogy a P -t és a D -t P_1 -gyel összekötő egyenest egyező irányban egyenlő szöggel elfordítva kapjuk a C -n átmenő egyeneseket. Ez azonban azt is jelenti, hogy C , D , P és P_1 egy körön van. Ekkor a P -t és P_1 -et C -vel összekötő egyeneseket is egyező irányú és nagyságú forgás viszi át a P -t ill. P_1 -et, D -vel összekötő egyenesekbe. A P_1C , P_1D egyeneseket viszont CB vektorral eltolva a PB , PD egyeneseket kapjuk. Az előbbit az utóbbiba tehát ugyanolyan irányú és nagyságú forgás viszi át, mint PC -t PD -be. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. A kerületi szögek tételét nem egészen megszokott formában fogalmaztuk meg. Ezt azért tettük, mert ebben a formában szükséges és elégséges feltételét kapjuk annak, hogy négy pont egy körön feküdjék, anélkül, hogy vizsgálni kellene a pontok egymáshoz viszonyított elhelyezkedését a síkban.

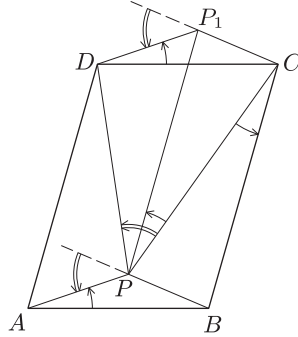
Az A , B , U , V pontok akkor és csak akkor vannak egy körön, ha az AU és BV egyenest ugyanolyan nagyságú és irányú elforgatás viszi át az AV , ill. BV egyenesbe (3. ábra).



¹ Az ábrán a szögek iránya ellentétes

3. ábra

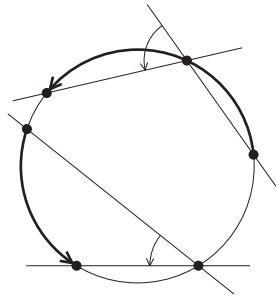
A tétel ilyen megfogalmazását használva elhagyhatjuk azt a feltevést is, hogy a P pont a paralelogrammán kívül van. Minden esetben igaz, hogy ha a feladat további feltételei teljesülnek, akkor a P -t B -vel, ill. C -vel összekötő egyenes egyező nagyságú szöggel forgatható egyező irányban az A -val, ill. D -vel összekötő egyenesbe. A fenti bizonyítás változtatás nélkül érvényes marad, amint az a 4. ábrán könnyen követhető.



4. ábra

2. Az előző megjegyzésben megfogalmazott tételt, illetőleg annak megfelelő összefüggéseket általában a középponti és kerületi szögek közti összefüggésből szokás levezetni, a tétel azonban könnyen belátható közvetlenül is.

Először kissé módosítjuk a kerületi szög és a befoglalt körív fogalmát. Kerületi szögnek nevezzük két egyenes szögét, ha az egyenesek a kör kerületén metszik egymást. Tekintsük az egyenesek másik metszéspontját a körrel. A két egyenes szöge által befoglalt köríven a körnek a metszéspontok közti két íve közül azt értjük, amelyiket a két egyenes adott nyílásszögű szögtartománya tartalmaz. Ha az egyenesek irányított szögét tekintjük, akkor a befoglalt ívet is irányíthatjuk az első szögszárral való metszésponttól a második szögszárral való metszéspont felé. Nem zárjuk ki azt sem, hogy az egyik szögszár érintő legyen; ez esetben az ezzel a szárral való „második metszéspont” is jelentse az érintés pontot (5. ábra).



5. ábra

A kerületi szög ilyen értelmezésével megengedtünk olyan eseteket is, amelyeknél a szög csúcsa a befoglalt köríven van és nem csak a 180° -ra kiegészítő szöget tekintjük mint a teljes körré kiegészítő íven nyugvó kerületi szöget.²

A következő tételt bizonyítjuk be:

Adott kör két (irányított) kerületi szöge akkor és csak akkor foglal be nagyságra és irányra egyenlő íveket, ha egyenlők.

A tételből nyilvánvalóan következik az előző megjegyzésben kimondott tétel. Ha ugyanis A , B , U , V egy körön fekszik, akkor az AU , AV egyenesek szöge is, a BU , BV egyeneseké is ugyanazt az UV ívet foglalja magába, tehát egyenlők.

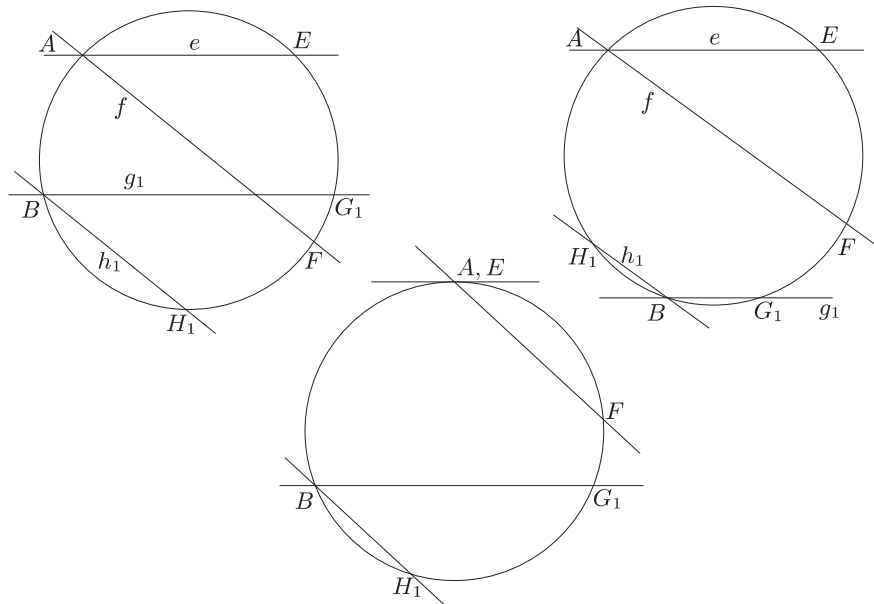
Ha viszont AU és AV nagyságra és irányra ugyanakkora szöget határoz meg, mint BU és BV , akkor először is nem lehet A , B és U egy egyenesen, mert akkor AU -val, ill. BU -val egyenlő szöget bezáró egyenesek párhuzamosak lennének, nem lehetne egy közös V metszéspontjuk, kivéve, ha egybeesnek ekkor sincs azonban egy meghatározott V metszéspont.

Létezik tehát egy egyértelműen meghatározott, A -n B -n, és U -n átmenő kör. Messe ez AV -t V' -ben. Ekkor BU és BV' szöge megegyezik AU és AV szögével, tehát feltétel szerint BU és BV szögével is, BV tehát egybeesik BV' -vel és így AV -vel való V metszéspontja is V' -vel. Ez azonban éppen azt jelenti, hogy A , B , U , V egy körön van, és ezt akartuk belátni.

Bizonyítsuk be ezután a főt kimondott tételt, legyen a körben két kerületi szög. Az egyiket alkossák az e és f egyenesek, a másikat a g és h egyenesek. Forgassuk el az utóbbit úgy, hogy az elforgatott g_1 és h_1 egyenes közül g_1

² Ezért látszott célszerűbbnek befoglalt ívről beszélni, mint arról az ívről, amin a szög nyugszik.

legyen párhuzamos e -vel. Jelöljük a szögek csúcsát A -val, ill. B -vel, e, f, g_1, h_1 másik metszéspontját a körrel E, F, G_1, H_1 -gyel (6. ábra).



6. ábra

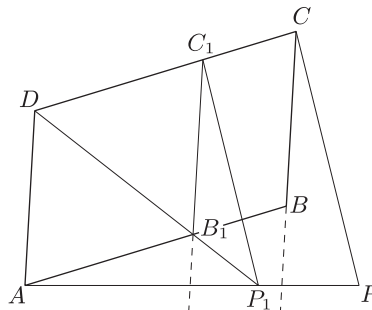
Két állítást kell belátnunk.

a) *A szögek egyenlőségéből következik az íveké:* ha e és f szöge megegyezik g_1 és h_1 szögével, akkor h_1 is párhuzamos f -fel. Az AE és BG_1 párhuzamos húrok felező merőlegese a körnek egyaránt átmérője és párhuzamosak, tehát egybeesnek. Az EG_1 ívnek erre az átmérőre vett tükröképe az AB ív, ezek tehát egyenlők és ellentétes irányúak. Hasonlóan az FH_1 ív is egyenlő AB -vel és ellentétes irányú, tehát EG_1 és FH_1 egyező irányú és nagyságú. Ekkor azonban EF és G_1H_1 is egyező irányú és nagyságú, mert az előbbi az EG_1 és G_1F ívek összege, az utóbbi pedig G_1F -ből az FH_1 ív hozzáadásával keletkezik.

b) *Az ívek egyenlőségéből következik a szögeké:* Ha az EF és G_1H_1 ívek irányra is, nagyságra is megegyeznek, akkor $EG_1 = EF + FG_1$ és $FH_1 = FG_1 + G_1H_1$ ívek is megegyeznek. Mivel $e \parallel g_1$ most is fennáll, így EG_1 és AB egyező nagyságú és ellentétes irányú ívek. Ekkor azonban ugyanez áll az AB és FH_1 ívekre is. Ha tehát tükrözzük az AF húrt merőlegesen felező átmérőre, akkor B tükröképe H_1 lesz. Eszerint a BH_1 egyenes, vagyis h_1 is merőleges a tükrötengelyre, tehát párhuzamos f -fel. Ekkor azonban g_1 és h_1 szöge megegyezik e és f szögével, és ezt kellett belátnunk.

II. megoldás. A P pont rombusz esetén a BD átló egyenesének a paralelogrammán kívüli részén van, mert a BD -re való tükrözés A -t C -be és így a BAP szöget a BCP szögbe viszi át.

Ha a paralelogramma nem rombusz, akkor mérjük az A -ból induló és B -n átmenő félegyenesre az $AB_1 = AD$ távolságot. A B_1 -en át AD -vel párhuzamosan húzott egyenes messe a CD egyenest C_1 -ben. Egy P_1 pont, amely az AB_1C_1D paralelogrammára vonatkozóan elégíti ki a feladat feltételeit, a DB_1 átló egyenesén van. Szimmetria folytán feltehetjük, hogy a B_1 -en túli meghosszabbításon (7. ábra).

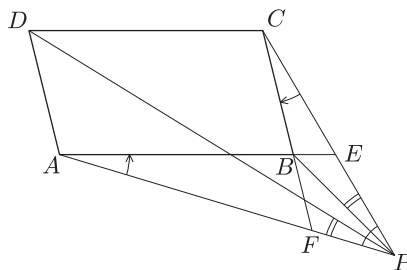


7. ábra

Toljuk el a $B_1C_1P_1$ szöget úgy, hogy B_1C_1 menjen át BC -be. Ekkor P_1 az AP_1 egyenes mentén mozdul el és jut a P pontba. Ez a BC egyenes ellenkező partján van mint A , másrészt az egész A -ból induló P_1 -en átmenő félegyenes AB

ellenkező partján van, mint a paralelogramma. Így P az AB és CB egyenesek B -n túli meghosszabbításai határolta síkrészben van.

Messe AB és CB egyenese a CP , ill. AP egyenest E -ben, ill. F -ben. Megmutatjuk, hogy az $APCD$ és $EPFB$ négyszögek hasonlóak, a csúcsokat felsorolt sorrend szerint feleltetve meg egymásnak. (8. ábra)



8. ábra

Valóban P -nél levő szögük közös; másrészt $EBF\angle = ABC\angle$, mert egymás csúcsszögei, viszont $ABC\angle = ADC\angle$; végül $BEP\angle = DCP\angle = DAP\angle$. Az utóbbi egyenlőség épp a feladat feltétele folytán áll fenn.

Az ABF és CBE háromszög hasonló, mert A -nál és C -nél feltétel szerint egyenlő szög van, a B -nél levő szögek pedig csúcsszögek. Ebből következik, hogy

$$\frac{BE}{BF} = \frac{BC}{BA} = \frac{AD}{CD},$$

azaz a két négyszög egy-egy egymásnak megfelelő oldalpárjának az aránya is megegyezik. Ebből már következik a két négyszög hasonlósága és ebből az, hogy az átlók az egymásnak megfelelő oldalakkal egyenlő szöget zárnak be. Így $APD\angle = EPB\angle = CPB\angle$. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.