

I. megoldás. A feltételek szerint a nevezőben szereplő kifejezések 0-tól különbözők, így a kifejezéseknek mindig van értelme. (1)-ben b -nek első és második hatványa fordul elő, így tekinthetjük b -re vonatkozóan másodfokú egyenletnek. Redukáljuk 0-ra:

$$2a \frac{a^2 + c^2}{(a^2 - c^2)^2} b^2 - b - a = 0.$$

Feltételeink szerint b ennek pozitív gyöke. Mivel a másodfokú tag együtthatója és a konstans tag ellenkező előjelű, a másodfokú egyenletnek egy pozitív és egy negatív gyöke van. Eszerint az adott összefüggés pontosan akkor áll fenn, ha

$$\begin{aligned} b &= \frac{-1 + \sqrt{1 + 8a^2(a^2 + c^2)/(a^2 - c^2)^2}}{4a(a^2 + c^2)/(a^2 - c^2)^2} = \\ &= \frac{(a^2 - c^2) \left(c^2 - a^2 + \sqrt{(a^2 - c^2)^2 + 8a^2(a^2 + c^2)} \right)}{4a(a^2 + c^2)} = \\ &= \frac{(a^2 - c^2)(c^2 - a^2 + \sqrt{9a^4 + 6a^2c^2 + c^4})}{4a(a^2 + c^2)}. \end{aligned}$$

Itt a négyzetgyökös kifejezés $(3a^2 + c^2)$ -tel egyenlő, mert ez pozitív, és ennek a négyzete áll a gyökjel alatt. A 0-tól különböző $2(a^2 + c^2)$ -tel egyszerűsítve azt kapjuk, hogy

$$b = \frac{a^2 - c^2}{2a} \quad \text{vagy} \quad 2ab = a^2 - c^2.$$

Ez, mint láttuk, ugyanakkor teljesül, mint a feladatban szereplő összefüggés, tehát annak egyszerűbb alakja.

Megjegyzések. 1. A nyert összefüggésből az is látható, hogy $a \geq 2b$.

2. Többen c^2 -re vonatkozóan tekintették másodfokú egyenletnek az adott összefüggést. Ezen az úton kicsit bonyolult számítás vezet el a fenti eredményhez.

II. megoldás. Az (1) összefüggésből az $a > c \geq 0$ feltétel folytán vele egyenértékű összefüggést kapunk, ha $(a^2 - c^2)^2$ -nel megszorozzuk mindkét oldalt. Jelöljük $(a^2 - c^2)$ -et átmenetileg d -vel, ekkor c^2 -et d -vel fejezve ki $a^2 + c^2 = 2a^2 - d$, s így a következőt kapjuk:

$$4a^3b^2 - 2ab^2d = ad^2 - bd^2,$$

a bal oldalon

$$2ab - \frac{bd}{2a}$$

négyzetének a -szorosát kapjuk, ha a két oldalhoz $b^2d^2/4a$ -t adunk:

$$a \left(2ab - \frac{bd}{2a} \right)^2 = \frac{b^2d^2}{4a} + ad^2 - bd^2 = \frac{1}{4a}(b^2d^2 + 4a^2d^2 - 4abd^2) = \frac{1}{4a}(2ad - bd)^2.$$

Szorozzunk $4a$ -val és redukáljunk 0-ra. Ekkor a keletkező kifejezés szorzattá alakítható:

$$\begin{aligned} (4a^2b - bd)^2 - (2ad - bd)^2 &= (4a^2b + 2ad - 2bd)(4a^2b - 2ad) = \\ &= 4a((a^2 + c^2)b + a(a^2 - c^2))(2ab - a^2 + c^2). \end{aligned}$$

Az első tényező az $a > c \geq 0$ feltétel miatt pozitív, így a szorzat akkor 0, ha

$$(2) \quad 2ab - a^2 + c^2 = 0.$$

Ez az összefüggés tehát akkor és csak akkor teljesül, ha (1) fennáll.

Megjegyzés. A (2) összefüggést tekinthetjük másodfokú egyenletnek a -ra vonatkozóan. Ennek is egy pozitív és egy negatív gyöke van. Így az $a > 0$ feltétel szerint

$$a = b + \sqrt{c^2 + b^2}.$$

Ez az összefüggés is ekvivalens tehát az (1) összefüggéssel. Nem szoktuk egyszerűbbnek tekinteni (2)-nél pl. a benne fellépő négyzetgyökvonás miatt, ez azonban végső soron ízlés kérdése csak.

A nyert eredmény érdekes abból a szempontból, hogy mutatja: az adott feltételek mellett az (1) összefüggésben bármelyik két mennyiség egyértelműen határozza meg a harmadikat. Mint láttuk, a és b megadása esetén még az $a \geq 2b$ feltételnek is kell teljesülnie.