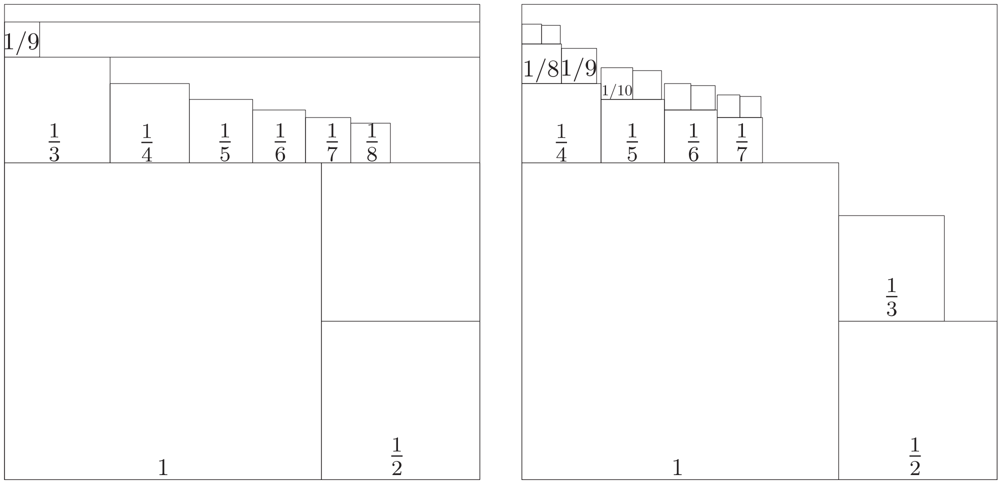
I. megoldás. Helyezzük egymás mellé az $1/3^k$ oldalú négyzettől az $1/(3^{k+1}-1)$ oldalúig valamennyit, ahol $k=0,1,\ldots$. Közülük az első 3^k négyzet oldalának a hossza nem nagyobb $1/3^k$-nál, a következő 3^k-é pedig $1/(2\cdot 3^k)$-nál, így a keletkező sor hossza nem nagyobb, mint

$$3^k\cdot\left(1/3^k+1/(2\cdot 3^k)\right)=1{,}5.$$



Helyezzük a keletkező sorokat egymás fölé. Mindegyikben az első négyzet a legmagasabb, így az összes sorok magassága együtt

$$\frac{1}{3^0}+\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=1{,}5.$$

II. megoldás. Helyezzük az 1 oldalú négyzet mellé az 1/2 és 1/3 oldalút, majd fölé az 1/4, 1/5, 1/6 és 1/7 oldalút, a továbbiakban pedig mindegyik négyzetre a fele akkora oldalút és a rákövetkezőt.

Az utóbbi kettő nyilván nem nyúlik túl az alattuk levő négyzeten, és

$$\frac14+\frac15+\frac16+\frac17<4\cdot\frac14=1$$

folytán az első négy négyzet sem az 1 oldalú négyzeten.

Az $1/k$ oldalú négyzet ($k=4,5,6,7$) és a ráhelyezettek felfelé nem nyúlnak magasabbra, mint

$$\frac1k+\frac{1}{2k}+\frac{1}{4k}+\frac{1}{8k}+\ldots=\frac2k\le\frac12,$$

így négyzeteinket elhelyeztük egy 1,5 oldalú négyzetben.

Megjegyzés. A versenyzők nagy része először a négyzetek területösszegét becsülte meg felülről, sőt néhányan azt is tudták, hogy a területek alkotta végtelen sor összege[1] $\frac{\pi^2}{6}$. Az összeg megbecslése fölösleges már azért is, mert a négyzetek elhelyezése már ad egy ilyen felső becslést, hiszen a befoglaló négyzet területe, 2,25, felső korlát.

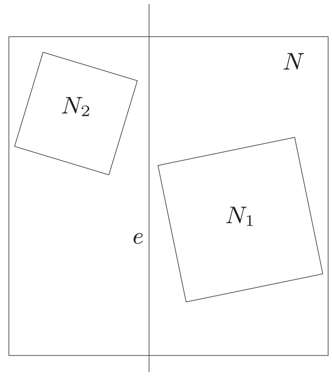
A második megoldás érdekessége az, hogy meglepően jó felső korlátot lehet belőle leolvasni. Valóban, a megoldás végén azt nyertük, hogy az $1/k$ oldalú négyzet és a ráhelyezettek benne vannak egy $2/k$, $1/k$ oldalú téglalapban ($k=4,5,6,7$), így az összes négyzetek együttes területe nem nagyobb, mint

$$1+\frac14+\frac19+2\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}\right)<1{,}663,\qquad \text{míg}\qquad \frac{\pi^2}{6}=1{,}6449\ldots$$

b) Az 1 és a 0,5 oldalú négyzet nem helyezhető el átfedés nélkül 1,5-nél kisebb oldalú négyzetben.

I. megoldás. Helyezkedjék el az 1 oldalú $\mathbf{N}_1$ és az 1/2 oldalú $\mathbf{N}_2$ négyzet egy $\mathbf{N}$ négyzetben úgy, hogy ne legyen közös belső pontjuk. Ekkor van olyan e egyenes, amelynek $\mathbf{N}_1$ és $\mathbf{N}_2$ ellenkező oldalán fekszik. Ha e párhuzamos $\mathbf{N}$ valamelyik oldalával, akkor két téglalapra bontja azt, és mindegyiknek az e-re merőleges oldala legalább akkora, mint a sávban fekvő négyzet oldala. Ez esetben tehát $\mathbf{N}$ oldala legalább akkora, mint $\mathbf{N}_1$ és $\mathbf{N}_2$ oldalának összege.

[1] Lásd pl. *Skljarszkij–Csencov–Jaglom:* Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből I. Aritmetika és algebra. Tankönyvkiadó, Budapest, 1965. 298–299. old.



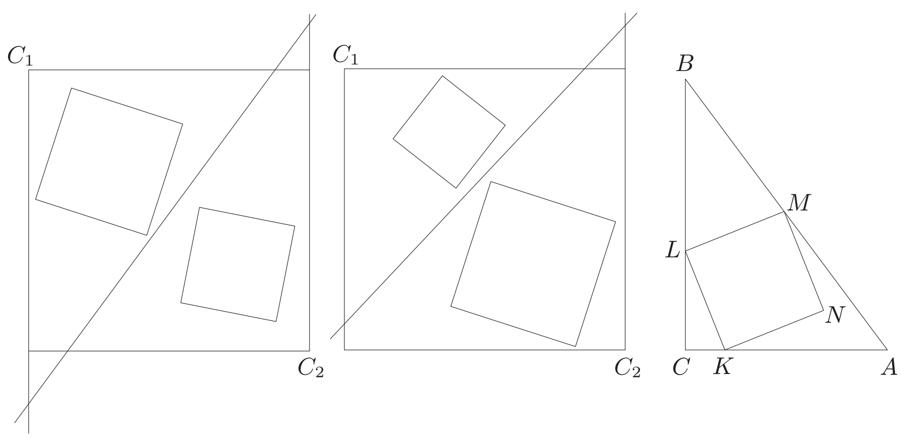
1. ábra

Ha e metszi $\mathbf{N}$ mindegyik oldalegyenesét, akkor vegyük mindkét oldalán $\mathbf{N}$-nek a tőle legtávolabbi C_1, ill. C_2 csúcsát. A C_1-en, ill. C_2-n átmenő oldalegyenesek e-vel egy $\mathbf{H}_1$, ill. $\mathbf{H}_2$ derékszögű háromszöget alkotnak, amelyik $\mathbf{N}_1$-et, ill. $\mathbf{N}_2$-t tartalmazza. Állításunk bizonyítására elég azt megmutatni, hogy *egy derékszögű háromszög tartalmazta négyzetek közül az a legnagyobb, amelyiknek két oldala a háromszög befogóin nyugszik, egy csúcsa pedig az átfogón van.*

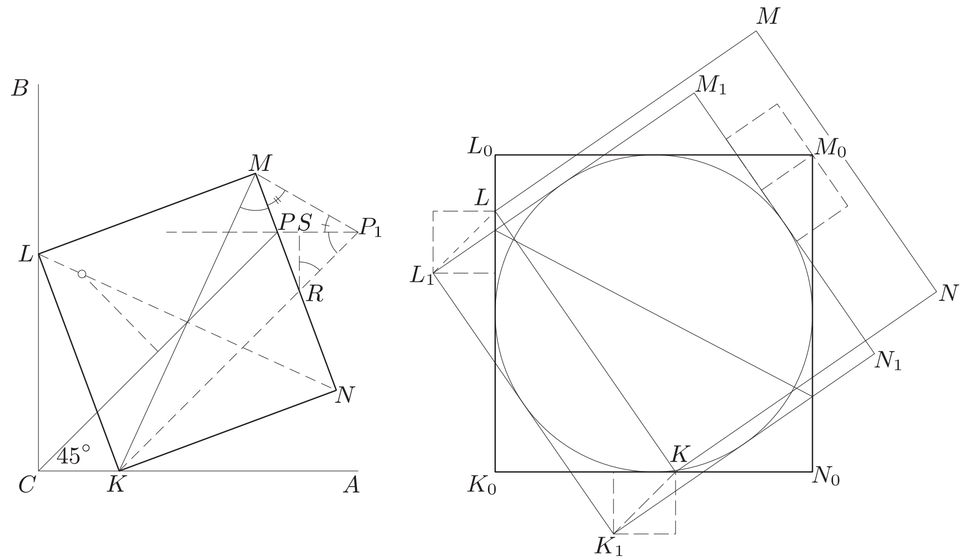
Valóban, ha ez igaz, akkor a $\mathbf{H}_1$-ben és $\mathbf{H}_2$-ben elhelyezhető legnagyobb négyzet átlója, $\mathbf{N}$-nek a C_1C_2 átlójára esik, és mivel a négyzetek nem fedhetik át egymást, így átlóik összege $\mathbf{N}$ átlóját, oldalhosszaik összege tehát $\mathbf{N}$ oldalát adja, vagyis igaz a bizonyítandó állítás is.

A továbbiakban a fent megfogalmazott segédtételt bizonyítjuk.

Az ABC derékszögű háromszögben levő tetszés szerinti $KLMN$ négyzetet elmozgathatjuk úgy, hogy két csúcsa, mondjuk K és L az AC, ill. BC befogón legyen – ha nem lett volna így eredetileg –, majd C-ből nagyítva, ha kell, elérhetjük, hogy egy csúcs az átfogóra kerüljön. Elég tehát az ilyen helyzetű négyzeteket vizsgálni. Ezek középpontja a háromszög derékszögének szögfelezőjén van. Forgassuk el ugyanis a négyzetet a középpontja körül derékszöggel úgy, hogy az AC-n levő csúcsa a BC-n levőbe menjen át. Ekkor az AC egyenes is átmegy BC-be, így a középpont e két egyenestől egyenlő távolságban van, tehát rajta van a köztük levő szög felezőjén.



2. ábra



3. ábra

Annak a négyzetnek, amelyiknek az egyik csúcsa C-be esik, az ezzel szemközti csúcsa nincs közelebb C-hez, mint a C-ből induló szögfelező MN-nel való P metszéspontja. Elég tehát megmutatnunk, hogy ha K és L különbözik C-től, akkor $CP > KM$.

Toljuk el CP-t párhuzamosan a KP_1 helyzetbe, ekkor a KP_1M háromszög két oldalát kell összehasonlítanunk. Ezt a velük szemben levő szögek közvetítésével fogjuk megtenni. A KM-mel, ill. KP_1-gyel szemközti szög $PP_1M\sphericalangle$-gel, ill. $PMP_1\sphericalangle$-gel nagyobb $45°$-nál.

Jelöljük KP_1 és MN metszéspontját R-rel, R vetülete PP_1-en legyen S. P_1RS háromszög derékszögű és egyenlő szárú, továbbá S a P és P_1 pont közt van, így

$$PRP_1\sphericalangle > SRP_1\sphericalangle = PP_1R\sphericalangle,$$

amiből következik, hogy

$$PP_1 > PR.$$

Azt is tudjuk, hogy CP felezi KM-et, így felezi MR-t is, mert KR és CP párhuzamos. Ezért

$$MP = PR < PP_1, \qquad \text{tehát} \qquad MP_1P\sphericalangle < PMP_1\sphericalangle.$$

De ekkor egyszersmind

$$MP_1K\sphericalangle = MP_1P\sphericalangle + 45° < PMP_1\sphericalangle + 45° = KMP_1\sphericalangle,$$

amiből viszont

$$KM < KP_1 = CP$$

következik, és ezt akartuk bizonyítani.

Megjegyzés. Gyorsabban befejezhetjük a bizonyítást a kerületi szögek tételének felhasználásával: C, K, P és M egy körön van, mert KP $45°$-os szögben látszik C-ből is, M-ből is. A kör középpontja a CP és KM húr felező merőlegesének metszéspontja. Mivel az előbbi húr átmegy az utóbbi felezőpontján, a húrok középponttól mért távolságai egy derékszögű háromszög befogója és átfogója. A KM húrtól mért távolság az átfogó, tehát a nagyobbik, így a KM húr a kisebb.

II. megoldás. Azt mutatjuk meg, hogy ha egy $K_0L_0M_0N_0 = \mathbf{N}_0$ négyzetet egy olyan $KLMN = \mathbf{N}$ helyzetbe mozdítunk el a síkban, hogy K és L csúcsa a K_0N_0, ill. K_0L_0 félegyenesen maradjon, akkor $\mathbf{N}$ tartalmazni fogja az M_0 csúcsot. Ez valóban azt jelenti, hogy ha $\mathbf{N}$ benne van egy derékszögű háromszögben, amelyiknek derékszöge az $L_0K_0N_0\sphericalangle$, akkor írható a háromszögbe $\mathbf{N}$-nél nagyobb négyzet, amelyiknek két oldala a befogókon nyugszik.

Forgassuk először el a négyzetet a középpontja körül $\mathbf{N}_0$ körüljárásával ellentétes irányba hegyes szöggel, a $K_1L_1M_1N_1 = \mathbf{N}_1$ helyzetbe, majd toljuk el a végleges helyére. K_1 és L_1 egyenlő távol van $\mathbf{N}_0$ megfelelő oldalától a forgatás következtében. Rajzoljunk olyan négyzeteket, amelyeknek egyik csúcsa K_1, ill. L_1, másik két csúcsa $\mathbf{N}_0$ legközelebbi oldalán van és K_1-ből, ill. L_1-ből induló átlója K_0M_0-lal párhuzamos. Ekkor a kérdéses átlók egyenlők lesznek, így megadják a kívánt eltolás vektorát.

Azt kell még belátnunk, hogy az eltolás hossza nagyobb, mint a K_0M_0 szakasz $\mathbf{N}_1$-en túlnyúló darabja. Azonban M_0 távolsága M_1N_1-től ugyanakkora, mint K_1-é K_0N_0-tól, mert K_1N_1 és M_0N_0, továbbá M_1L_1 és K_0L_0 a két négyzet közös beírt körének egymással átellenes érintőpárjai, így metszéspontjaik összekötő egyenesére tükrözve a két négyzetet egymásba mennek át. Rajzoljuk meg azokat a négyzeteket, amelyeknek egyik csúcsa M_0 és két-két csúcsuk M_1N_1-en van, ezek egyike tartalmazza a kérdéses szakaszt, az tehát nem nagyobb, mint a négyzet átlója, aminek hossza viszont éppen az eltolás hossza. Ezzel ismét igazoltuk a segédtétel állítását.

Megjegyzés. A bizonyításban nem használtuk ki, hogy a nagy négyzetben tartalmazott két négyzet oldalának hossza 1 és 1/2 egység, így a b) részben azt bizonyítottuk be, hogy *ha egy N négyzetben elhelyezhető egy N_1 és N_2 négyzet úgy, hogy ne legyen közös belső pontjuk, akkor N oldalának hossza legalább akkora, mint N_1 és N_2 oldalhosszának az összege.* Ez lényegében megegyezik a P. 208. pontversenyen kívüli problémával[2], így a fentiekben annak is megoldását adtuk.

[2] Lásd KÖMAL 48. kötet 3. szám 126. oldal.