

A sík egész koordinátájú pontjait rácspontnak fogjuk nevezni.

I. megoldás. Feladatunk tetszés szerinti pozitív p értékhez olyan korlátot keresni, amelynél nagyobb r sugár esetén mindig van az r sugarú körtől p -nél kisebb távolságra levő rácspont. Kézenfekvő olyan egyenesen keresni ilyen rácspontot, amelyiken egyrészt sűrűn vannak rácspontok, másrészt, amelyek „lehetőleg jól simul” a körhöz, kis hegyes szögben metszi.¹ A rácspontok legsűrűbben – egymástól 1 távolságra – a koordinátatengelyekkel párhuzamos és a megfelelő tengelytől egész távolságra levő egyeneseken sorakoznak. Válasszuk pl. az y tengellyel párhuzamos ilyen egyenesek közül a legtávolabbit, amelyiknek még van közös pontja a körrel. Ennek az y tengelytől mért u távolságára

$$(1) \quad u \leq r < u + 1 \quad (u \text{ egész}).$$

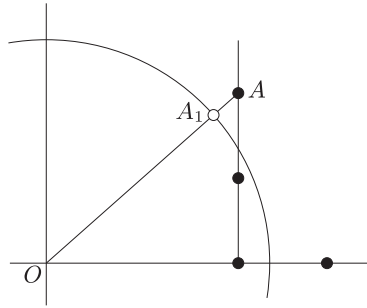
Ezen az egyenesen a kört közrefogó (u, v) , $(u, v + 1)$ rácspontok ordinátájára

$$(2) \quad u^2 + v^2 \leq r^2 < u^2 + (v + 1)^2 \quad (v \text{ egész}).$$

A körön kívül levő A rácspontot az O origóval összekötő egyenes messe a kört A_1 -ben. Ekkor

$$\begin{aligned} \delta(r) \leq AA_1 &= OA - r = \sqrt{u^2 + (v + 1)^2} - r = \frac{u^2 + (v + 1)^2 - r^2}{\sqrt{u^2 + (v + 1)^2} + r} = \\ &= \frac{2v + 1 - (r^2 - u^2 - v^2)}{\sqrt{u^2 + (v + 1)^2} + r} < \frac{2v + 1}{2r}, \end{aligned}$$

ugyanis a számlálóban elhagyott kivonandó a (2) egyenlőtlenség első fele szerint nem negatív, a nevezőben levő négyzetgyökök pedig az egyenlőtlenség második fele szerint nagyobb r -nél.



(2) első fele és (1) segítségével kapcsolatot találunk v és r között is:

$$v \leq \sqrt{r^2 - u^2} = \sqrt{(r - u)(r + u)} < \sqrt{1 \cdot (r + r)} = \sqrt{2r}.$$

Ezt felhasználva, ha pl. $r > 1$, akkor

$$\delta(r) < \frac{2\sqrt{2r} + 1}{2r} < \frac{3\sqrt{r} + \sqrt{r}}{2r} < \frac{2}{\sqrt{r}}.$$

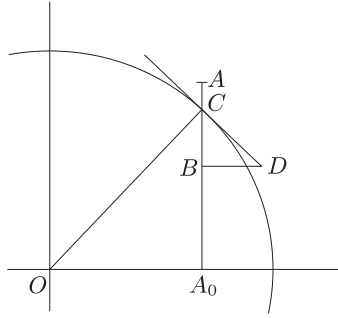
Így $\delta(r)$ biztosan kisebb lesz p -nél, amint

$$\frac{2}{\sqrt{r}} < p \quad \text{azaz} \quad r > \frac{4}{p^2} \quad \text{és} \quad r > 1.$$

Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Megjegyzések. 1. Nyilvánvalóan nyerhettünk volna 2-nél kisebb számlálót a $\delta(r)$ -re kapott felső korlátban, de ez nem volt célunk. Csupán azt akartuk belátni, hogy van olyan korlát, amelyiknél nagyobb r -ekre $\delta(r) < p$. Hogy mi a legkisebb ilyen korlát, az már a probléma szempontjából lényegtelen, annál is inkább, mert nem feltétlenül a fent kiválasztott A a körhöz legközelebbi rácspont.

¹Egyenes és kör szögén az egyenesnek és a körrel való metszéspontjában a körhöz húzott érintőnek a szögét szokás érteni. Általában beszélünk két egymást metsző görbe szögéről a metszéspontjukban, – ezen a metszéspontban a görbékhez húzott érintők szögét értjük, feltéve, hogy mindkettőnek van egyértelműen meghatározott érintője ebben a pontban.



2. Sok más módon is becsülték a versenyzők az $A(u, v + 1)$ vagy $B(u, v)$ pont távolságát a körtől. Egy ilyen út a következő: az AB egyenes metszéspontját a körrel, ill. az x tengellyel jelölje C , ill. A_0 , a B -n át az x tengellyel párhuzamosan húzott egyenes és a körhöz a C -ben húzott érintő metszéspontját D . Ekkor B távolsága a körtől kisebb, mint BD , így a BCD és A_0OC háromszögek hasonlósága folytán

$$\begin{aligned} \delta(r) < BD &= \frac{BD}{1} = \frac{BD}{AB} < \frac{BD}{BC} = \frac{A_0C}{A_0O} = \frac{\sqrt{r^2 - u^2}}{u} < \\ &< \frac{\sqrt{2r}}{u} < \frac{\sqrt{2r}}{r-1} < \frac{\sqrt{2r}}{\frac{r}{r-\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{r}}, \end{aligned}$$

ha $r > 2$; így

$$\delta(r) < p, \quad \text{ha egyidejűleg } r > \frac{8}{p^2} \quad \text{és} \quad r > 2.$$

3. A feladat szoros kapcsolatban van a következő kérdéssel. Keressünk tetszés szerinti pozitív egész N számhoz olyan $M(N)$ számot, amelyre az $N, N + M(N)$ számközben van két négyzetszám összegeként írható szám.

Ha N -et a fenti megoldás r^2 -ének választjuk, az $n = u^2 + (v + 1)^2$ tekinthető egy közeli négyzetszámmak:

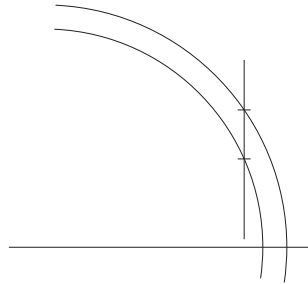
$$n - N = u^2 + (v + 1)^2 - r^2 < 2v + 1,$$

és mivel $n - N$ egész, így

$$n - N \leq 2v < 2\sqrt{2r} = \sqrt{8}\sqrt[4]{N}.$$

Az $N, N + \sqrt{8}\sqrt[4]{N}$ számközben tehát mindig van két négyzetszám összegeként írható szám.

II. megoldás. Mivel az $x = u$ (u pozitív egész) egyenlettel jellemzett egyenesen egységnyi távolságra követik egymást a rácspontok, így elég megmutatni, hogy tetszőleges pozitív p -hez, ha r elég nagy, választható u úgy, hogy az $x = u$ egyenletű egyenesnek az r és $r + p$ sugarú körök közti körgyűrűbe eső szakasza, – pl. az első síknegyedben – legalább 1 hosszúságú legyen. Ekkor ugyanis erre a szakaszra esik rácspont és az legfeljebb p távolságra van a körtől.



Válasszuk meg u -t az

$$u \leq r < u + 1$$

feltétellel. Ha $u + 1 \leq r + p$, akkor az $(u + 1, 0)$ pont a körgyűrűbe esik; így elég csak azt az esetet vizsgálni, ha

$$(3) \quad u \leq r < r + p < u + 1.$$

Ez eleve csak akkor teljesülhet, ha $p < 1$. Az említett szakasz h hosszára

$$h = \sqrt{(r + p)^2 - u^2} - \sqrt{r^2 - u^2} = \frac{(r + p)^2 - r^2}{\sqrt{(r + p)^2 - u^2} + \sqrt{r^2 - u^2}}.$$

Itt a számláló nagyobb, mint $2rp$, a nevezőben levő négyzetgyökök pedig így becsülhetők felülről (3) felhasználásával, ha pl. $r > 1$,

$$\begin{aligned}\sqrt{(r+p)^2 - u^2} &= \sqrt{(r+p-u)(r+p+u)} < \sqrt{1 \cdot (r+1+r)} < \sqrt{3r}, \\ \sqrt{r^2 - u^2} &= \sqrt{(r-u)(r+u)} < \sqrt{1 \cdot 2r}.\end{aligned}$$

Így

$$h > \frac{2rp}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})\sqrt{r}} = \frac{2p}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{r},$$

tehát $h > 1$, ha

$$r > \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2}{4p^2} = \frac{5 + \sqrt{24}}{4} \cdot \frac{1}{p^2}.$$

Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.