I. Megoldás. Megadunk egy utasítást arra, hogyan kell a még nem színezett szakaszokat színezni. Legyen AB egy olyan szakasz, amelynek végpontjai az adott pontok közül valók és amely még nincs kiszínezve. A feltétel szerint létezik egy és csakis egy olyan törött vonal, mely eredetileg színezett szakaszokból áll és A-t B-vel köti össze. Jelölje V_{AB} ezt a törött vonalat. Legyen mármost az AB szakasz

kék, ha V_{AB} páratlan sok kék szakaszt tartalmaz és legyen
piros, ha V_{AB} páros sok kék szakaszt tartalmaz.

(Megjegyezzük, hogy ez a „színezési szabály” akkor is érvényes, ha AB már eleve is színezett volt.)

Megmutatjuk, hogy a fenti „színezési szabály” kielégíti a feladat követelményeit. Legyen e célból ABC tetszőleges háromszög, melynek csúcsai az adott pontok közül valók.

Először is *megadható olyan D pont, melyből az A-ba, B-be, C-be vezető, eredetileg színezett szakaszokból álló V_{DA}, V_{DB}, V_{DC} utaknak nincsen D-től különböző közös pontjuk* (megengedjük itt, hogy D egybeessen pl. A-val, ekkor V_{DA} egyetlen pontból áll). Tekintsük ugyanis az A-t B-vel összekötő, eredetileg színezett szakaszokból álló V_{AB} utat. C-ből A felé elindulva a V_{CA} úton, előbb-utóbb elérjük a V_{AB} út valamely D pontját (ha C rajta fekszik a V_{AB} úton, akkor $D = C$; természetesen az is előfordulhat, hogy $D = A$ vagy $D = B$). Könnyen látható, hogy az így megszerkesztett D pont a fenti kikötésnek eleget tesz (5. ábra).

5. ábra

5. ábra

Mármost a fenti színezési szabály szerint, az AB, BC, AC szakaszok között rendre annyi kék van, ahány páratlan szám előfordul az

$x =$ a V_{DA} és V_{DB} utakon fekvő kék szakaszok száma,
$y =$ a V_{DB} és V_{DC} utakon fekvő kék szakaszok száma és
$z =$ a V_{DC} és V_{DA} utakon fekvő kék szakaszok száma között.

Mivel $x+y+z$ páros (hiszen V_{DA}, V_{DB}, V_{DC} utak minden kék szakasza kétszer van beszámítva ebbe az összegbe), az ABC háromszögnek valóban páros sok kék oldala van.

II. Megoldás. Válasszunk ki egy tetszőleges A_0 pontot és színezzük ki sárgára. Ezek után a többi pontot is kiszínezzük sárgával és zölddel a következőképpen: egy A_0-ból kiinduló, eredetileg is színezett szakaszokból álló törött vonal mentén haladva, az i-edik pont legyen az $(i-1)$-edikkel azonos színű, ha a kettőt összekötő szakasz piros, és különböző színű, ha az összekötő él kék. Mivel a feltétel szerint bármely pontba egy és csakis egyféleképpen juthatunk el ilyen törött vonalon, azért minden pont színe egyértelműen meg van határozva.

Ezek után a következő „színezési szabályt" adhatjuk meg: az AB él legyen

piros, ha A, B mindegyike zöld vagy mindegyike sárga, és legyen
kék, ha A, B különböző színűek.

Megállapíthatjuk, hogy az eredetileg megszínezett szakaszok e „színezési szabálynak" megfelelően vannak színezve.

Tekintsünk mármost egy tetszőleges ABC háromszöget, melynek csúcsai az adott pontok közül valók. Ha A, B, C azonos színűek, akkor az AB, BC, AC szakaszok mindegyike piros. Ha, mondjuk A és B azonos és C tőlük különböző színű, akkor AB piros, AC és BC kék. A piros szakaszok száma tehát vagy 3 vagy 1, mindenképpen páratlan. Tehát a megadott „színezési szabály" a feladat kikötésének eleget tesz.

Megjegyzések. 1. Több dolgozat a pontok száma szerinti teljes indukcióval igazolta az állítást.

2. Megmutatható – erre több versenyző utalt is –, hogy a szakaszoknak a feladatbeli színezése egyértelmű. Legyen ugyanis AB tetszőleges szakasz. A feltétel szerint A és B összeköthető egy, eleve színezett élekből álló

$$\overline{A_0A_1\ldots A_n} \qquad (A_0=A, \quad A_n=B)$$

törött vonallal. Mármost az $A_0A_1A_2$ háromszögben páratlan sok piros élnek kell lennie, ez meghatározza az A_0A_2 szakasz színét. Így az $A_0A_2A_3$ háromszögben már két szakasz színe adott, ez meghatározza az A_0A_3 szakasz színét. Hasonlóan továbbmenve láthatjuk, hogy az AB szakasz színe is egyértelműen meg van határozva.

3. Elegendő volna a feladatban annyit feltenni, hogy bármely két pont *legfeljebb* egyféleképpen köthető össze eredetileg is megszínezett szakaszokból álló törött vonallal. Ilyenkor ugyanis (mint az könnyen igazolható) meg lehet még néhány további szakaszt színezni úgy, hogy a kapott szakaszokra már a feladat feltétele teljesüljön.