I. Megoldás. Jelölje p a kérdezett valószínűséget, k pedig az első 90 számból kiválasztható azon számötösök számát, melyekben nincsen két szomszédos. Mivel az összes lehetséges lottóhúzások száma $\binom{90}{5}$, azért

$$p = 1 - \frac{k}{\binom{90}{5}},$$

így tulajdonképpen a k szám meghatározása a feladat.

Tekintsünk egy olyan

$$1 \le a < b < c < d < e \le 90$$

számötöst, melyben nincs két szomszédos azám. Ekkor az

$$a, \qquad b-1, \qquad c-2, \qquad d-3, \qquad e-4$$

számötös számai különbözők, és 1 és 86 közé esnek. Megfordítva, minden

$$1 \le a' < b' < c' < d' < e' \le 86$$

számötös esetén

$$a', \qquad b'+1, \qquad c'+2, \qquad d'+3, \qquad e'+4$$

olyan számötös, melynek mindegyik eleme 1 és 90 közé esik, és nem tartalmaz szomszédos számokat. Így k egyenlő az első 86 számból kiválasztható számötösök számával, vagyis

$$k = \binom{86}{5}.$$

Innen

$$p = 1 - \frac{\binom{86}{5}}{\binom{90}{5}} = 1 - \frac{86 \cdot 85 \cdot 84 \cdot 83 \cdot 82}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = 0{,}2\ldots$$

II. Megoldás. Az előző megoldásban talált k számot más ötlettel is meghatározhatjuk. Tekintsünk egy sorban 90 egyforma golyót, egy kicsit ferde vályúban és emeljük ki az a-adikat, b-ediket, c-ediket, d-ediket és e-ediket, ahol a, b, c, d, e egy olyan lottószámötös, amely nem tartalmaz szomszédos egészeket. A visszamaradó golyók összegurulnak, és egy 85 golyóból álló láncot alkotnak. k mármost annak számát jelenti, ahányféleképpen 5 nem szomszédos golyót a 90-ből ki lehet emelni; vagyis, megfordítva, ahányféleképpen a 85 golyóból álló láncba 5 golyót be tudunk iktatni úgy, hogy ne legyen közöttük két szomszédos. Egy ilyen „beiktatást” azzal jellemezhetünk, hogy megmondjuk, a lánc 86 „golyóköze” közül melyik 5-öt választjuk ki (a lánc eleje és vége is „köz”-nek számít, ezért 86 a számuk). Vagyis

$$k = \binom{86}{5}.$$

Megjegyzések. 1. Ha n számból m-et húzunk, akkor annak a valószínűsége, hogy a kihúzott számok között van legalább két szomszédos:

$$1 - \frac{\binom{n-m+1}{m}}{\binom{n}{m}}.$$

2. Az első megoldás gondolatmenete segítségével az is belátható (ez az általánosítás *Ruzsa Imre* dolgozatában szerepelt), hogy ha megadunk $c_1, c_2, \ldots, c_{m-1}$ természetes számokat, akkor annak a valószínűsége, hogy az első n természetes számból kihúzott $1 \le a_1 < \ldots < a_m \le n$ szám-m-esre

$$a_2 - a_1 > c_1, \qquad a_3 - a_2 > c_2, \qquad \ldots, \qquad a_m - a_{m-1} > c_{m-1}$$

álljon fenn, éppen

$$\frac{\binom{n - c_1 - c_2 - \ldots - c_{m-1}}{m}}{\binom{n}{m}}.$$

Ennek belátásához azt jegyezzük meg, hogy ha $(a_1, \ldots, a_m)$ ilyen szám-m-es, akkor

$$1 \leq a_1 < a_2 - c_1 < a_3 - c_1 - c_2 < \ldots < a_m - c_1 - c_2 - \ldots - c_{m-1} \leq n - c_1 - \ldots - c_{m-1},$$

és viszont.

3. A magyar lottóhúzások 1957-től 1971. március végéig lefolyt 738 húzása közül 146-ban fordult elő a vizsgált számszomszédosság, éspedig a számötösöket növekvően rendezve az 1. és 2. helyen álló számok között 39 esetben, a további szomszédos helyek között rendre 27, 41, 39 esetben.