

Megoldás. Jelölje k a sokszög hegyesszögeinek számát. Mivel minden hegyesszög kisebb, mint 90° , a hegyesszögek összege kisebb, mint $k \cdot 90^\circ$. A többi $n - k$ szögről csak annyit tudunk, hogy kisebbek, mint 360° , így összegük kisebb, mint $(n - k) \cdot 360^\circ$. Így az n -szög szögösszege kisebb, mint

$$k \cdot 90^\circ + (n - k) \cdot 360^\circ = n \cdot 360^\circ - k \cdot 270^\circ.$$

Másrésztől azonban az n -szög szögeinek összege $(n - 2) \cdot 180^\circ$, tehát

$$(n - 2) \cdot 180^\circ < n \cdot 360^\circ - k \cdot 270^\circ,$$

ahonnan rendezés és 90° -kal való osztás után

$$3k \leq 2n + 4$$

adódik. Mivel mindkét oldalon egész szám áll,

$$3k \leq 2n + 3,$$

és így

$$k \leq \frac{2n}{3} + 1.$$

Így azt kaptuk, hogy egy síkbeli n -szögnek legfeljebb

$$\left[\frac{2n}{3} \right] + 1$$

hegyesszöge lehet (a szögletes zárójel, mint szokásos, a szám egész részét jelöli).

Hozzá tartozik még a feladathoz annak megmutatása, hogy ez a korlát el is érhető; más szóval, olyan n -szöget kell konstruálnunk, melyben a hegyesszögek száma pontosan $\left[\frac{2n}{3} \right] + 1$.

Foglalkozunk először azzal az esettel, amikor n 3-mal osztható, vagyis $n = 3r$. Ekkor $\left[\frac{2n}{3} \right] + 1 = 2r + 1$.

1. ábra

Tekintsünk egy 60° -os körcikket, legyen a körív két végpontja A és B , a körcikk csúcsa P , és osszuk az AB ívet a $C_1, C_2, \dots, C_{2r-2}$ pontokkal $2r-1$ egyenlő részre. Jelölje S_i a $C_{2i-1}PC_{2i}$ háromszög súlypontját ($i = 1, \dots, r-1$). Húzzunk S_i -n át párhuzamost PC_{2i-1} -gyel, és merte ez a $C_{2i-2}C_{2i-1}$ egyenest D_{2i-1} -ben, C_0 -on A -t értve. Hasonlóképpen legyen D_{2i} a PC_{2i} -vel párhuzamos, S_i -n áthaladó egyenesnek és $C_{2i}C_{2i+1}$ -nek metszéspontja, C_{2r-1} -en B -t értve (1. ábra).

Tekintsük mármost a következő sokszöget:

$$\Sigma = PAD_1S_1D_2D_3S_2D_4 \dots D_{2i-1}S_iD_{2i}D_{2i+1}S_{i+1} \dots D_{2r-3}S_{r-1}D_{2r-2}BP$$

(2. ábra). Ennek nyilván $3r$ csúcsa van és $2r + 1$ hegyesszöge a $P, A, D_1, D_2, \dots, D_{2r-2}, B$ csúcsok mindegyikénél hegyesszöge van. Ugyanis az APB szög 60° , a PAD_1 szög a PAC_1 egyenlő szárú háromszög alapján fekvő szögek egyike, tehát hegyesszög, az AD_1S_1 szög pedig ezzel egyenlő, hiszen AD_1S_1 és AC_1P párhuzamos szárú szögek. A többi felsorolt szögről hasonlóan látható be, hogy hegyesszögek.

2. ábra

Másodszor azzal az esettel foglalkozunk, amikor n 3-mal osztva 1-et ad maradékul, vagyis $n = 3r + 1$. Ekkor $\left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil + 1 = 2r + 1$. Az előzőek szerint tudunk olyan $3r$ -szöget szerkeszteni, melynek $2r + 1$ hegyesszöge van. Tekintsük az előzőekben megszerkesztett Σ sokszöget, és az AP oldal felező merőlegesén válasszunk egy olyan Q pontot, mely benne van a PAC_1 háromszögben. Ekkor $QAC_1 \sphericalangle < PAC_1 \sphericalangle$ és $QPB \sphericalangle < APB \sphericalangle$, tehát hegyesszögek, így a Σ sokszög

AP oldalát az AQP töröttvonallal helyettesítve olyan Σ' $(3r + 1)$ -szöget kapunk, melyben $2r + 1$ hegyesszög van (3. ábra).

3. ábra

Végül tekintsük az $n = 3r + 2$ esetet. Tekintsük ismét a $3r$ csúcsú Σ sokszöget. Legyen PA , ill. PB (P -hez közelebbi) harmadolópontja Q_1 , ill. Q_2 , és P -nek Q_1Q_2 -re való tükörképe P_1 . Ekkor a Σ sokszög AP , PB oldalait az $AQ_1P_1Q_2B$

töröttvonallal helyettesítve olyan Σ'' sokszöget kapunk, melynek $3r + 2$ csúcsa és $2r + 2 = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor + 1$ hegyesszöge van, hiszen a P helyett fellépő három csúcs közül kettőben, Q_1 -ben és Q_2 -ben 60° -os, vagyis hegyesszög van (4. ábra).

4. ábra

Megjegyzések. 1. Az olvasóra bízunk annak belátását, hogy a Σ , Σ' , Σ'' sokszögek nem metszik át önmagukat.

2. Számos más módon is konstruálható n szögpontú, $\left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil + 1$ hegyesszöggel rendelkező sokszög. Több versenyző teljes indukcióval definiálta ezeket, n -ről $n + 3$ -ra lépve (ekkor $n = 3, 4, 5$ esetére meg kell adni egy-egy példát, ami nyilvánvaló). A legtöbb megoldásban Σ a fentihez hasonlóan volt megalkotva, de belőle Σ' -t és Σ'' -t már igen sok különböző módon készítették el a versenyzők.

3. Több versenyző megjegyezte, hogy ha csak konvex sokszögekre szorítkoznánk, a hegyesszögek maximális száma 3 volna.